

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE
BAND 72 HEFT 5
DER GANZEN REIHE 377. BANDES 5. HEFT

KURATORIUM:
M. PLANCK, G. QUINCKE, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK



LEIPZIG

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1923 erscheinen Bd. 70, 71, 72 und 73 à 8 Hefte. Preis von Band 72 für Belgien u. Luxemburg Fr. 60.—, Frankreich Fr. 50.—, Dänemark Kr. 18.—; England £ -16-; Finnland Marka 100.—; Holland fl. 10.—; Japan £ -16-; Italien Lire 60.—; Norwegen Kr. 20.—, Schweden Kr. 14.—; Schweiz Fr. 20.—, Spanien Pes. 20.—; U.S.A. \$ 4.—.

Ausgegeben am 28. September 1923

Inhalt.

	Seite
1. D. Enskog. Zur Quantentheorie des Dampfdruckes und der Dissoziation	321
2. Carl Ramsauer. Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen. II. Fortsetzung und Schluß	345
3. Johannes Fischer. Über die Beugungserscheinungen bei sphärischer Aberration	353
4. Wilhelm Peter Radt. Über die Bremsung bewegter Ladungen beim Überfliegen leitender Körper.	400

Die Redaktion der *Annalen* wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Leopoldstraße 91.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die *Annalen* bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

the

21

15

53

90

n

n

e

n

n

,

t

s

n

-

-

t

.

a

-

a

i

g

a

,

Sa
Kö
in
Wi
wu
lun
als
wor

Qu
der
sch
und
sch
Me
ang
rau
son
und
ent
me

S. 6

17.

a. a
leau

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 72.

1. Zur Quantentheorie des Dampfdruckes und der Dissoziation;

von D. Enskog.

Einleitung.

Vor etwa zehn Jahren wurde durch die Arbeiten von Sackur¹⁾ und Tetrode²⁾ erwiesen, daß der Dampfdruck fester Körper bei tiefer Temperatur und das Dissoziationsgleichgewicht in gasförmigen Systemen mit dem elementaren Planckschen Wirkungsquantum nahe verknüpft sind. In der folgenden Zeit wurden in verschiedener Weise quantentheoretische Behandlungen der betreffenden Zustände gegeben. Es scheint jedoch, als wären dabei einige Einzelheiten nicht völlig aufgeklärt worden, weshalb sie hier besprochen werden sollen.

Erstens ist es nicht deutlich zu sehen, wo und wie die Quantentheorie anzuwenden ist. Im allgemeinen geht man von der Boltzmannschen Beziehung zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit, bzw. der Maxwell-Gibbsschen zwischen Entropie und Phasenvolumen aus. Es wird das ideale Gas in verschiedener Weise gequantelt. Einerseits wird als wesentliches Merkmal der quantentheoretischen Behandlung die Hypothese angesehen, daß die Boltzmannsche Zelleneinteilung des Phasenraumes nicht einen bloßen mathematischen Kunstgriff darstellt, sondern daß die Zellen eine physikalische Realität besitzen und der Größe nach gleich einer Potenz von h sind.³⁾ In einer entsprechenden Einheit ist das Gibbssche Phasenvolumen zu messen. Es ergibt sich in dieser Weise ein Absolutwert der

1) O. Sackur, *Nernst-Festschrift* S. 405. 1912; *Ann. d. Phys.* **40**. S. 67. 1913.

2) H. Tetrode, *Ann. d. Phys.* **38**. S. 434. 1912; *Proc. Amsterd.* **17**. S. 1167. 1915.

3) Vgl. O. Sackur, *Ann. d. Phys.* **36**. S. 958. 1911; H. Tetrode, *a. a. O.*; M. Planck, *Wolfskehlvorlesung* 1913 (*Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen* VI. 1914).

Entropie und somit der Nernstschen chemischen Konstante des Gases. — Von Scherrer und nach ihm Brody¹⁾ werden die zwischen den Wänden herumfliegenden Gasmoleküle als bedingt periodische Systeme gequantelt. Hiernach kann die Translationsenergie der Moleküle nur diskrete Werte annehmen. — Tetrode²⁾ und nach ihm Keesom³⁾ und Lenz⁴⁾ zerlegen die Wärmebewegung des Gases in periodische Wellenzüge und wenden dann auf das Gas die Quantentheorie etwa in derselben Weise an, wie es Debye auf den festen Körper tut. Gegen diese letzteren Arbeiten sind von H. A. Lorentz⁵⁾ Einwände erhoben worden, auch weichen die Resultate von denen der übrigen Theorien ab.

Von Stern⁶⁾ ist eine andere Ableitung des Dampfdruckes gegeben, die sich prinzipiell von den übrigen darin unterscheidet, daß die Quantentheorie nur auf den festen Körper angewandt wird. Das zugrunde gelegte Modell des festen Körpers ist freilich ziemlich speziell, und man erhält auch keinen direkten Einblick in das Zustandekommen des Gleichgewichtes bei den tieferen Temperaturen, wo die Quanten von Bedeutung sind.

Im folgenden werden nur die periodischen oder bedingt periodischen Bewegungen der Atome unter der Einwirkung ihrer gegenseitigen Wechselwirkungen als Quantenbewegungen behandelt. Die Größe der Boltzmannschen Zellen wird willkürlich gewählt. Die Translationsgeschwindigkeit der frei herumfliegenden Moleküle wird in der klassischen Weise behandelt. Das elementare Wirkungsquantum tritt daher in den auf einem verdünnten einatomigen Gas bezüglichen Größen nicht auf. Bei etwas größeren Dichten wird zufolge der Kohäsionskräfte zwischen den Molekülen eine Assoziation auftreten, die quantentheoretisch berechnet werden kann. In

1) P. Scherrer, Gött. Nachr. 1916. S. 159; E. Brody, Zeitschr. f. Physik 6. S. 79. 1921.

2) H. Tetrode, Phys. Zeitschr. 14. S. 212. 1913.

3) W. H. Keesom, Phys. Zeitschr. 14. S. 665. 1913.

4) Vgl. A. Sommerfeld, Wolfskehlvorlesung 1913.

5) H. A. Lorentz, Proc. Amsterd. 19. S. 737. 1917.

6) O. Stern, Phys. Zeitschr. 14. S. 629. 1913; Zeitschr. f. Elektrochem. 25. S. 66. 1919.

dieser Weise wird das Wirkungsquantum auch in die Zustandsgleichung usw. der einatomigen Gase eingeführt.

Eine andere Schwierigkeit ist statistischer Art und betrifft die Definition der Entropie. Definiert man in gewöhnlicher Weise die Entropie als Logarithmus der Zustandswahrscheinlichkeit, so wird die spezifische Entropie von der totalen Molekül- oder Atomzahl des betrachteten Systems abhängig.¹⁾ Im folgenden wird eine neue zuerst von Hilbert gegebene Entropiedefinition eingeführt, die von dieser Schwierigkeit frei ist. Wenn diese Definition auf einem zusammengesetzten System angewandt wird, so erscheint die Entropie desselben ohne weiteres als die Summe der Entropien der Teilsysteme.

Die betreffenden Sätze über Dampfdruck und Dissoziationsgleichgewicht wollen wir nach zwei Methoden ableiten. Ohne Einführung des Entropiebegriffes können wir sie direkt aus dem Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetz erhalten. In dieser Weise überblickt man vielleicht am leichtesten, welche physikalische Hypothesen nötig sind, und welche Schlüsse man aus einer Nichtübereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zu ziehen hat. Es wird sodann der oben erwähnte Entropiebegriff entwickelt und das vorliegende Problem mit deren Hilfe gelöst. Endlich werden die Resultate diskutiert und die Methoden zur experimentellen Bestimmung des statistischen Gewichtes der Quantenzustände besprochen.²⁾

Der Dampfdruck eines festen Körpers bei tiefen Temperaturen.

Wir denken uns zunächst bei tiefer Temperatur einen einatomigen gesättigten Dampf in Berührung mit dem festen Körper. Die Lage und der Geschwindigkeitszustand eines Moleküls sei durch die Angabe der Cartesischen Koordinaten q_1, q_2, q_3 seines Schwerpunkts und der zugehörigen Momente p_1, p_2, p_3 bestimmt. Von Rotationen sehen wir ab. Die

1) Vgl. hierüber P. Ehrenfest und V. Trkal, *Ann. d. Phys.* **65**, S. 609. 1921; *Proc. Amsterd.* **23**, S. 162. 1920; M. Planck, *Ann. d. Phys.* **66**, S. 365. 1921

2) Nachdem diese Abhandlung zum größten Teil schon fertig redigiert war, ist eine Abhandlung von R. H. Fowler erschienen (*Phil. Mag.*, Jan. 1923), wo das Dissoziationsgleichgewicht in anderer Weise behandelt wird. Einige meiner Resultate finden sich auch bei Fowler.

Konstante der potentiellen Energie bestimmen wir so, daß diese Energie für Moleküle im freien Zustand gleich Null wird. Der Dampf wird als ideales Gas vorausgesetzt. Es seien in der Volumeneinheit des Dampfes n Moleküle vorhanden, und es sei m die Masse eines Moleküls, T die absolute Temperatur und k die Boltzmannsche Konstante. Wir betrachten $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ als Cartesische Koordinaten in einem sechsdimensionalen Phasenraum. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Phasenpunkt eines Moleküls sich in einem Phasengebiet $dp_1 dp_2 \dots dq_3$ befindet, ist dann nach dem Verteilungsgesetz von Maxwell-Boltzmann gleich

$$(1) \quad \frac{n}{(2\pi m k T)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} dp_1 \dots dq_3.$$

Auf die Dampfmoleküle angewandt, deren potentielle Energie verschwindet, ist (1) der Ausdruck der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung, wenn ε die kinetische Energie des Moleküls bedeutet. In anderen Fällen gilt nach Boltzmann noch der Satz, wenn ε die ganze Energie eines Moleküls ist.

Ein Dampfmolekül kann von dem festen Körper aufgefangen werden. Nach der Quantentheorie sind dabei nur diskrete Zustände stationär. Bei hinreichend tiefer Temperatur kommt nur der Quantenzustand der kleinsten Energie vor. Die anderen werden zufolge des Verteilungsgesetzes unterdrückt. Das statistische Gewicht dieses Zustandes sei gleich P . Wir verstehen darunter, daß die apriorische Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül sich in diesem Zustand befindet, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, daß im freien Zustande sein Phasenpunkt in einem Phasengebiet der Größe $P \cdot h^3$ liegt.

Ist λ_0 die auf ein Molekül bezogene Verdampfungswärme

1) Bei den Anwendungen, die Boltzmann in entsprechenden Fällen von diesem Satze macht, kommt eine Klassifikation der Moleküle nach deren Impulse nicht in Frage. Boltzmann berechnet die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül sich in einem gewissen Raumbereich befindet, ohne Rücksicht auf dessen Geschwindigkeit (Wiss. Abhandl. III S. 547 und 642; Vorlesungen über Gastheorie II. S. 167 und 180). Nach seiner klassischen Molekülstatistik gilt überall das Maxwell'sche Verteilungsgesetz. Bei unserer Behandlung ist aber die Zerlegung auch nach den Impulsen wesentlich, und es gilt, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, daß ein Phasenpunkt sich in einem begrenzten Phasengebiet befindet

beim absoluten Nullpunkt, so ist die Energie des tiefsten Quantenzustandes gleich $-\lambda_0$. Die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein Molekül sich in einem bestimmten solchen Zustand (auch der Ort bestimmt) befindet, ist nach (1) gleich

$$\frac{n}{(2\pi m k T)^{3/2}} \cdot e^{\frac{\lambda_0}{kT}} \cdot Ph^3.$$

Diese Wahrscheinlichkeit muß aber beim Gleichgewicht gleich 1 sein. Ist sie z. B. kleiner, so müssen mehr Moleküle in den Dampfraum übergehen als umgekehrt. Statt n führen wir den Dampfdruck ein. Da

$$(2) \quad p = n k T$$

ist, so folgt daher

$$(3) \quad p = \frac{(2\pi m k T)^{3/2} k T}{Ph^3} \cdot e^{-\frac{\lambda_0}{kT}}.$$

Dies ist, von dem Faktor P abgesehen, die schon lange bekannte Formel. Dieselbe Ableitung kann auch auf ein mehratomiges Gas angewandt werden. Nur erhält P hier eine kompliziertere Bedeutung. Der tiefste Rotationszustand und dessen Wahrscheinlichkeit könnten im festen Zustande andere als im gasförmigen sein. Es könnte auch vorkommen, daß man sich den festen Körper nicht aus den mehratomigen Molekülen, sondern direkt aus den einzelnen Atomen aufgebaut zu denken hat. Dies könnte auf den Wert von P einwirken. Wenn demselben λ_0 verschiedene Möglichkeiten entsprechen, so wird sich der Zustand mit dem größten P einstellen, da dies dem kleinsten Dampfdruck entspricht. Jedenfalls gibt (3) ein Mittel, auf experimentellem Wege das Gewicht P zu bestimmen.

Wir haben hier den festen Körper einigermaßen idealisiert, da wir von den Quantenzuständen der einzelnen Moleküle gesprochen haben, als wären diese voneinander unabhängig. Denkt man sich aber, daß die Moleküle des festen Körpers in der Nähe von $T = 0$ unbeweglich sind, so ist dagegen wohl nichts einzuwenden.

Dissoziation.

Wir denken uns ein Gemisch von zwei einatomigen Gasen im idealen Zustande. In der Volumeneinheit seien von dem ersten Gase n_1 und von dem zweiten n_2 freie Atome vorhanden. Die

Massen der Atome seien m_1 bzw. m_2 , die Geschwindigkeitskomponenten mit ξ_1, η_1, ζ_1 bzw. mit ξ_2, η_2, ζ_2 bezeichnet.

Wir wollen nach dem Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetze die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß sich ein Atom der ersten Art relativ zu einem der zweiten in einem gewissen Phasengebiet befindet. Wir setzen zuerst fest, daß die Atome sich in den infinitesimalen Raumgebieten do_1 und do_2 befinden sollen, während die Geschwindigkeitskomponenten den Geschwindigkeitsgebieten $d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 = d\Gamma_1$ bzw. $d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2 = d\Gamma_2$ gehören. Die Wahrscheinlichkeit dieser Konstellation ist

$$(4) \quad w = \frac{n_1 n_2 (m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi k T)^3} \cdot e^{-\frac{\epsilon'}{kT}} do_1 do_2 d\Gamma_1 d\Gamma_2,$$

wo ϵ' die ganze Energie des Atompaars bedeutet. Die potentielle Energie eines freien Atoms ist dann gleich 0 angenommen. Statt der Koordinaten und Geschwindigkeiten der beiden einzelnen Atome führen wir die Koordinaten des gemeinsamen Schwerpunkts, die relativen Koordinaten des ersten Atoms bezüglich des zweiten und die entsprechenden Geschwindigkeiten ein. Sind l_x, l_y, l_z die Komponenten der Schwerpunkts- geschwindigkeit, so ist

$$l_x = \frac{m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2}{m_1 + m_2},$$

$$g_x = \xi_1 - \xi_2$$

usw. Die Determinante wird folglich gleich 1, und es ist

$$(5) \quad d\Gamma_1 d\Gamma_2 = dl_x dl_y dl_z dg_x dg_y dg_z$$

zu setzen. Entsprechendes gilt von der Transformation der Koordinaten. Es sei ϵ'' die kinetische Energie des Atompaars. Führen wir die Geschwindigkeiten $l_x \dots g_x$ ein, so ergibt sich

$$\epsilon'' = \frac{m_1 + m_2}{2} (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g_x^2 + g_y^2 + g_z^2).$$

Sehen wir von äußeren Kräften ab, so wird die Energie von den Schwerpunktskoordinaten unabhängig. Integrieren wir nach diesen Koordinaten über eine Volumeneinheit, so werden einfach die Differentiale derselben aus dem Ausdruck verschwinden. Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu erhalten

müssen wir auch über die Komponenten der Schwerpunkts-
geschwindigkeit integrieren. Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m_1 + m_2}{2kT} l_x^2} dl_x = \left(\frac{2\pi kT}{m_1 + m_2} \right)^{1/2}$$

ist, so ergibt sich aus (4) nach der Integration

$$(6) \quad \frac{n_1 n_2}{(2\pi kT)^{3/2}} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} dq_1 dq_2 dq_3 dg_x dg_y dg_z,$$

wenn ε die gesamte relative Energie und q_1, q_2, q_3 die relativen Koordinaten bedeuten. Führen wir statt g_x, g_y, g_z die relativen Impulse p_1, p_2, p_3 ein, so wird

$$p_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g_x = \mu g_x$$

usw., wo μ die reduzierte Masse ist. Der Ausdruck (6) geht in

$$(7) \quad n = \frac{n_1 n_2}{(2\pi \mu kT)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} dp_1 \dots dq_3$$

über. Fassen wir $p_1 \dots q_3$ als die Cartesischen Koordinaten eines 6-dimensionalen Phasenraumes auf, so ist dies die Zahl der Atumpaare in der Volumeneinheit, deren Phasenpunkte sich in dem Gebiet $dp_1 \dots dq_3$ befinden. Statt dem parallel-epipedischen Phasengebiet können wir auch ein anderes von beliebiger Form einführen, wenn darin nur ε merklich konstant ist.

In den Fällen, wo zwei Atome zu einem Molekül vereint sind, müssen wir uns denken, daß sie relativ zueinander periodische oder bedingt periodische Bewegungen ausführen, die durch Quantenbedingungen festgelegt sind. Es gibt eine ganze Reihe solcher Zustände, die durch verschiedene Kombinationen der Quantenzahlen, z. B. der azimuthalen und der radialen, ausgezeichnet sind. Wir denken uns dieselben durchnummeriert und bezeichnen die entsprechenden Energiewerte mit ε_i die Gewichte die wir ganz wie oben definieren, mit P_i ($i = 1, 2, 3 \dots$). Die Zahl der in dem i -ten Quantenzustand befindlichen Moleküle ist dann nach (7) gleich

$$(8) \quad n^{(i)} = n_1 n_2 \frac{h^3}{(2\pi \mu kT)^{3/2}} \cdot P_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}$$

und die ganze Zahl der Moleküle in Volumeneinheit:

$$(9) \quad n = n_1 n_2 \cdot \frac{h^3}{(2 \pi \mu k T)^{3/2}} \cdot \sum P_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}.$$

Wenn man hier die Partialdrucke p , p_1 und p_2 statt den Molekül- und Atomzahlen n , n_1 und n_2 einführt, so ergibt sich (vgl. (2)):

$$(10) \quad \frac{p}{p_1 p_2} = \frac{h^3}{(2 \pi \mu k T)^{3/2} k T} \cdot \sum P_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}.$$

Bei der Festsetzung der Gewichte P_i hat man alle möglichen Richtungen der Molekülachse in Betracht zu ziehen. Sind aber beide Atome gleich, so wird in dieser Weise jedes Molekül doppelt gezählt. Hier kommt folglich im Nenner ein Faktor 2 hinzu. Oder es gilt, wenn σ die Symmetriezahl bedeutet, die in den beiden Fällen bzw. gleich 1 oder 2 ist, allgemein

$$(11) \quad \frac{p}{p_1 p_2} = \frac{h^3}{\sigma (2 \pi \mu k T)^{3/2} k T} \cdot \sum P_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}.$$

Es könnte hiernach scheinen, als ob der Dissoziationsgrad sich plötzlich verdoppeln würde, wenn die Atome zuerst einander dynamisch sehr ähnlich wären, um dann identisch gleich zu werden. Die nähere Betrachtung zeigt, daß dies nicht der Fall ist. Bezeichnen wir die rechte Seite von (10) mit k , so können im ersteren Falle drei Arten von Molekülen entstehen, deren Partialdrucke nach (11)

$$p_{11} = p_1^2 \cdot \frac{k}{2},$$

$$p_{12} = p_1 p_2 k,$$

$$p_{22} = p_2^2 \cdot \frac{k}{2}$$

sind. Betrachten wir aber die Atome als gleichartig, so wird nach (11) der Partialdruck des zweiatomigen Gases

$$p = (p_1 + p_2)^2 \cdot \frac{k}{2}.$$

Es ist mithin wirklich $p = p_{11} + p_{12} + p_{22}$.

Nimmt man an, daß die Schwingungen „eingefroren“ sind, und daß man die Summe über die Rotationszustände durch ein Integral ersetzen kann, so geht Formel (11) in diejenige

über, die man aus den von Tetrode, Ehrenfest und Trkal abgeleiteten chemischen Konstanten erhält. Zwar scheint dies nur in Ausnahmefällen erlaubt zu sein. Die näheren Erläuterungen hierzu wollen wir später geben.

Definition der Entropie.

Der Zustand eines Moleküls sei durch die generalisierten Koordinaten $q_1, q_2 \dots q_r$ und die zugehörigen Impulse $p_1, p_2 \dots p_r$ bestimmt oder durch die Lage des Phasenpunkts in dem $2r$ -dimensionalen Phasenraum (μ -Raum). Der Zustand einer aus N gleichartigen Molekülen zusammengesetzten Gasmasse ist dann durch die Verteilung der N zugehörigen Phasenpunkte im μ -Raume gegeben.

Ist das Gas in einem Gefäß eingeschlossen, so müssen bei endlicher Gesamtenergie sämtliche q und p endlich sein. Wir grenzen von dem μ -Raum ein konstantes Gebiet Ω ab, das bei allen betrachteten Zuständen des Gases sämtliche Phasenpunkte einschließt. Es sei ferner Ω in einer sehr großen Zahl gleich großer Zellen des Volumens ω eingeteilt. Diese Zellen sollen auch, von wenigen Ausnahmen abgesehen, die Bedingung erfüllen, daß sie je viele Phasenpunkte enthalten, wenn sie davon nicht frei sind. Dadurch wird ω auch nach unten hin begrenzt. Innerhalb des zugelassenen Gebiets soll diese Größe aber willkürlich gewählt werden können.

Wir denken uns, daß die Phasenpunkte auf die Zellen des Gebiets Ω durch Zufall verteilt werden. Die mathematische Wahrscheinlichkeit, daß N_1 derselben auf die erste Zelle, N_2 auf die zweite usw. fallen, ist dann

$$(12) \quad w = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^N.$$

Wir denken uns ferner bei derselben oder einem anderen Zustand des Gases Ω in noch viel kleinere Zellen des Volumens γ eingeteilt. Diese Zellen sollen so klein sein, daß im allgemeinen jede derselben höchstens einen Phasenpunkt enthält.¹⁾ Die

1) Auf diese Möglichkeit hat Hilbert in seinen Vorlesungen während des Sommersemesters 1922 hingewiesen. Die wichtigsten Gesichtspunkte der vorliegenden Abhandlung wurden von mir bei einer Diskussion in dem Göttinger Seminar über die Struktur der Materie im November 1922 hervorgehoben. Dabei war mir diese Tatsache entgangen. Für etwaige Mängel in der Formulierung bin ich selber verantwortlich.

Wahrscheinlichkeit einer beliebigen normalen Verteilung der Phasenpunkte auf diese Zellen ist dann gleich

$$(13) \quad w_0 = N! \left(\frac{g}{\Omega} \right)^N.$$

Diese Größe ist vom Zustand des Gases unabhängig, wenigstens solange das Gas hinreichend verdünnt und die Temperatur nicht zu niedrig ist. In jedem Fall soll sich w_0 auf einen Zustand beziehen, wo (13) gilt.

Als *thermodynamische Wahrscheinlichkeit* W bezeichnen wir das Verhältnis von w und w_0 oder in anderen Worten die erstere Wahrscheinlichkeit in der letzteren als Einheit gemessen. Nach (12) und (13) wird

$$(14) \quad W = \frac{1}{N_1! N_2! \dots} \left(\frac{\omega}{g} \right)^N.$$

Ist ferner S die Entropie, so setzen wir

$$(15) \quad S = k \cdot \ln W,$$

wo k die Boltzmannsche Konstante ist.

Wenn man zwei räumlich angrenzende Gasmassen in beliebigen Zuständen zu einer einzigen zusammensetzt, wobei die Zellen ω der beiden Gasräume getrennt bleiben sollen, so wird nach (14) die thermodynamische Wahrscheinlichkeit für das ganze System gleich dem Produkt derjenigen der Teilsysteme. D. h. es wird nach (15) die Entropie des ersteren gleich der Summe der Entropien der Teilsysteme. Dies gilt in aller Strenge und auch nicht nur etwa für das Gleichgewicht, sondern für beliebige Zustände. Es gilt auch, wenn die Teilsysteme aus verschiedenen Gasen bestehen.

Sind die Molekülzahlen N_1, N_2 usw. groß, so fällt die Größe ω aus der Entropie hinaus. Man setze

$$(16) \quad N_1 = f_1 \cdot \omega, \quad N_2 = f_2 \cdot \omega \dots$$

Durch Anwendung der Formel von Stirling ergibt sich aus (14)

$$(17) \quad W = \frac{e^{N f_1 \omega}}{f_1^{f_1 \omega} \cdot f_2^{f_2 \omega} \dots} \cdot \frac{1}{g^N}$$

und aus (15):

$$(18) \quad S = k \sum \omega (f_i - f_i \ln f_i) - k N \ln g.$$

Die spezifische Entropie wird außer von den spezifischen Eigenschaften des Gases nur von g , d. h. von der Einheitwahl abhängig sein.

Sucht man in gewöhnlicher Weise das Maximum von S , so wird man auf die Maxwell-Boltzmannsche Verteilung geführt. Ersetzt man in (18) die Summe durch ein Integral und führt man statt f_i die Maxwell'sche Verteilungsfunktion ein, so ergibt sich als Wert der Entropie eines einatomigen Gases

$$(19) \quad R = R \ln (T^{3/2} p^{-1}) + R \ln \left[\frac{(2 \pi m)^{3/2} k^{3/2}}{g} \right] + \frac{5}{2} R,$$

wo $R = kN$ die Gaskonstante, p den Druck, T die absolute Temperatur und m die Masse eines Moleküls bedeuten. Hier kommt die Größe h natürlich nicht vor. Man erhält den gewöhnlich angenommenen Wert, wenn man $g = h^3$ setzt.

Wir berechnen, wie viele Moleküle höchstens auf ein Phasengebiet der Größe h^3 fallen. Man erhält eine obere Grenze, wenn man in (1) $\varepsilon = 0$ und $dp_1 \dots dq_3 = h^3$ einsetzt, nämlich

$$\frac{n h^3}{(2 \pi m k T)^{3/2}}.$$

Setzt man die Daten für Wasserstoff ein, so findet man als Wert dieser oberen Grenze bei 0°C und Atmosphärendruck $1,1 \cdot 10^{-5}$. Für andere Gase wird der Wert noch niedriger, z. B. für Sauerstoff 64 mal.

Nimmt man $g = h^3$ an, so würde bei 0° und Atmosphärendruck unter 100 000 Zellen im Mittel höchstens eine einen Phasenpunkt enthalten. Die Wahrscheinlichkeit, daß man in einer derjenigen Zellen, die Phasenpunkte enthalten, zwei oder mehr Phasenpunkte antrifft, wäre 10^{-5} . Um die Konstante w_0 zu definieren, kann man demnach ohne weiteres $g = h^3$ nehmen. Dies hat aber natürlich für sich keine physikalische Bedeutung.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, wie man denselben Gedanken in den Fällen durchführen kann, wo als Maß der Zustandswahrscheinlichkeit ein Phasenvolumen genommen wird. Das Phasenvolumen muß in der Einheit $N! g^N$ bzw. $N!$ gemessen werden, und man erhält folglich immer die Permutationszahl $N!$ im Nenner. In ähnlicher Weise läßt sich der-

selbe Faktor auch bei Anwendung der Gibbsschen Methode rechtfertigen.¹⁾

Das System Dampf—fester Körper.

Wir denken uns wieder einen atomigen Stoff, der bei sehr tiefer Temperatur zum Teil als Dampf und zum Teil als fester Körper vorhanden ist. Die Zahl der Dampfmoleküle sei N , die der Moleküle des festen Körpers N' . Die Dampfmoleküle denken wir uns wie früher (S. 329) auf die Zellen ω verteilt. Die Moleküle des festen Körpers befinden sich mit wenigen Ausnahmen in dem tiefsten Quantenzustand, dessen Gewicht wir gleich P annehmen (vgl. S. 324). Dann hat man sich zu denken, daß jedes Molekül des festen Körpers eine eigene Zelle der Größe $P \cdot h^3$ einnimmt. Es wird

$$(20) \quad \begin{cases} w = \frac{(N + N')!}{N_1! N_2! \dots} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^N \left(\frac{P h^3}{\Omega} \right)^{N'}, \\ w_0 = (N + N')! \left(\frac{g}{\Omega} \right)^{N + N'}, \\ W = \frac{1}{N_1! N_2! \dots} \left(\frac{\omega}{g} \right)^N \left(\frac{P h^3}{g} \right)^{N'}. \end{cases}$$

Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit wird gleich dem Produkt zweier Faktoren, von denen der eine sich auf den Dampf bezieht und die Form (14) hat. Der andere Faktor bezieht sich auf den festen Körper, und sein mit k multiplizierter Logarithmus ist die Entropie derselben. Die Entropie des Systems wird folglich auch hier gleich der Summe der Entropien der Teilsysteme. Nur in der Entropie des festen Körpers kommt h vor. Nimmt man aber $g = P h^3$ an, so wird diese Entropie gleich Null und wenn $P = 1$, ergibt sich für die Entropie des Dampfes der gewöhnliche quantentheoretische Wert.

Ist S die Entropie des Systems, so erhalten wir (vgl. (18));

$$S = k \sum \omega (f_i - f_i \ln f_i) + k N' \ln (P h^3) - k (N + N') \ln g,$$

wo $N_i = f_i \omega$ gesetzt ist. Statt N' führen wir $A = N + N'$ ein, welche Größe konstant ist. Es ergibt sich

1) Vgl. die Behandlung in M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung S. 209, 4. Aufl. 1921, die Bemerkungen dazu von P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 65. S. 609. 1921 (am Schluß) und die Antwort von Planck, Ann. d. Phys. 66. S. 365. 1921.

$$(21) \quad S = k \sum_i \omega [f_i - f_i \ln f_i - f_i \ln (P h^3)] + k A \ln \left(\frac{P h^3}{g} \right),$$

da $N = \sum f_i \omega$ ist. Wir suchen das Maximum der Entropie unter der Bedingung, daß auch die ganze Energie konstant sein soll. Nehmen wir die Energie der Moleküle des festen Körpers gleich Null an, so wird die Energie eines Dampfmoleküls in der i -ten Zelle gleich $\varepsilon_i + \lambda_0$, wenn ε_i die kinetische Energie und λ_0 die Verdampfungswärme eines Moleküls beim absoluten Nullpunkt ist. Wir haben folglich

$$(22) \quad \sum \omega (\varepsilon_i + \lambda_0) f_i = \text{konst.}$$

Aus (21) und (22) ergibt sich, wenn $-\frac{1}{T}$ einen Lagrange'schen Multiplikator bezeichnet, und wenn man Index i fortläßt

$$-k \ln f - k \ln (P h^3) - \frac{\varepsilon + \lambda_0}{T} = 0$$

oder

$$f = \frac{1}{P h^3} \cdot e^{-\frac{\varepsilon + \lambda_0}{k T}}.$$

Die Verteilungsfunktion hat folglich die Form

$$f = \frac{n}{(2 \pi m k T)^{3/2}} e^{-\frac{\varepsilon}{k T}},$$

wo die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit

$$n = \frac{(2 \pi m k T)^{3/2}}{P h^3} e^{-\frac{\lambda_0}{k T}}$$

ist. Dies gibt wieder Formel (3). Wie man schon aus (21) sieht, muß die Größe g aus den Ausdrücken fortfallen.

Die Entropie eines zwei- oder mehratomigen Gases.

Um die Entropie eines zweiatomigen Gases zu erhalten, betrachten wir ein System, das aus zwei verschiedenen Atomgattungen und den entsprechenden zweiatomigen Molekülen besteht. Das Gemisch soll sich in einem idealen Gaszustande befinden. Es wird sich zeigen, daß auch in diesem Falle die Entropie des zusammengesetzten Systems gleich der Summe der Entropien der Teilsysteme ist. Dieselbe Methode kann natürlich auch in komplizierteren Fällen angewandt werden.

Wir denken uns zwei verschiedene μ -Räume, einen 6-dimensionalen und einen 12-dimensionalen. Auf die Zellen der

ersteren sollen die Phasenpunkte der N' Atome erster Gattung und die der N'' Atome zweiter Gattung verteilt werden. Der zweite μ -Raum soll die Phasenpunkte der N Moleküle enthalten. Die Koordinaten und Impulse seien hier die des Schwerpunkts des Moleküls und die der Relativbewegung. Um die Wahrscheinlichkeit w_0 zu erhalten, haben wir uns einen Zustand zu denken, wo alle $N' + N'' + 2N$ Atome frei sind und auf die sehr kleinen Einheitszellen g des ersteren μ -Raumes verteilt sind. Es wird mithin nach (13)

$$(23) \quad w_0 = (N' + N)! (N'' + N)! \left(\frac{g}{\Omega} \right)^{N' + N'' + 2N}.$$

Von den N Molekülen befinden sich $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$... bzw. in dem ersten, zweiten, dritten usw. Quantenzustande, deren Gewichte bzw. P_1 , P_2 , P_3 ... sind. Es sind mithin

$$(24) \quad N = N^{(1)} + N^{(2)} + N^{(3)} + \dots$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Koordinaten und Impulse des Schwerpunkts eines Moleküls einem Variabilitätsbereich ω und daß gleichzeitig die der Relativbewegung einem Bereich ω_1 gehören, ist dann nach (5) gleich der Wahrscheinlichkeit, daß die Koordinaten und Impulse eines freien Atoms einem Variabilitätsbereich ω und gleichzeitig die eines anderen einem Bereich ω_1 gehören und folglich gleich

$$\frac{\omega \omega_1}{\Omega^2}.$$

Sollen die relativen Koordinaten und Impulse dem i -ten Quantenzustand entsprechen, so ist hier $\omega_1 = P_i h^3$ zu setzen. Die Variabilitätsbereiche der Schwerpunktsgrößen nehmen wir alle gleich ω an und denken uns dieselben numeriert.

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit einer Komplexion, die den folgenden Bedingungen genügt. Von den Atomen der ersten Art sollen N' frei sein, und es sollen bzw. N_1' , N_2' , N_3' ... Phasenpunkte auf die Zellen des ersten μ -Raumes fallen. Von denen der zweiten Art seien N'' frei, und auf dieselben Zellen sollen bzw. N_1'' , N_2'' , N_3'' ... Phasenpunkte fallen. In dem i -ten Quantenzustand befinden sich $N^{(i)}$ Moleküle, und davon gehören $N_1^{(i)}$, $N_2^{(i)}$, $N_3^{(i)}$... Moleküle den entsprechenden Variabilitätsbereichen der Schwerpunktsgrößen ($i = 1, 2, 3 \dots$). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\left(\frac{\omega}{\Omega^2}\right)^{N' + N''} \prod_i \left(\frac{\omega P_i h^3}{\Omega^2}\right)^{N^{(i)}}$$

und die Zahl der Komplexionen

$$\frac{(N' + N)!(N'' + N)!}{N_1'! N_2'! \dots N_1''! N_2''! \dots \prod_i (N_1^{(i)!} N_2^{(i)!} \dots)}$$

Die Wahrscheinlichkeit w (12) ist gleich dem Produkt beider Größen. Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit W ist das Verhältnis von w und w_0 , folglich

$$(25) \quad \left\{ W = \frac{1}{N_1'! N_2'! \dots} \left(\frac{\omega}{g}\right)^{N'} \cdot \frac{1}{N_1''! N_2''! \dots} \left(\frac{\omega}{g}\right)^{N''} \cdot \prod_i \left[\frac{1}{N_1^{(i)!} N_2^{(i)!} \dots} \left(\frac{\omega P_i h^3}{g^3}\right)^{N^{(i)}} \right] \right\}.$$

Sie erscheint mithin als Produkt von Faktoren, die sich auf die verschiedenen Atom- und Molekülgattungen beziehen. Die zwei ersten Faktoren haben beide die Form (14) und ihre Logarithmen geben die Entropien der beiden einatomigen Komponenten des Gasgemisches. Der dritte Faktor gibt die Entropie des oder der zweiatomigen Komponenten. Man sieht, daß man auch diese Entropie in mehrere Glieder zerlegen kann entsprechend den verschiedenen Quantenzuständen. Diese Zerlegung kann übrigens noch weiter getrieben werden, so daß jede Gruppe der zu derselben Zelle gehörenden Atome oder Moleküle irgendeiner Gattung ihre eigene Entropie bekommt. Die Entropie des ganzen Systems wird immer gleich der Summe der Entropien aller Teilsysteme.

Da bei keinen Zustandsänderungen die Atomzahl geändert wird, so geht aus (25) hervor, daß die Größe g bei den Variationen der Entropie immer hinausfällt. Der Wert von g wirkt daher auf die Resultate nicht ein. Die Ausdrücke werden am einfachsten, wenn wir $g = h^3$ setzen, und das wollen wir daher im folgenden tun.

Sind die beiden Atome eines Moleküls gleich, so muß man entweder das Gewicht P_i nur auf die Hälfte aller Richtungen der Molekülachse im Raume beziehen oder auch P_i/σ statt P_i setzen, wo σ die Symmetriezahl bedeutet (vgl. S. 328).

Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit des Systems derjenigen Moleküle, die sich in dem i -ten Quantenzustand

befinden, und deren Schwerpunktskoordinaten und die entsprechenden Impulse zu dem s -ten Variabilitätsbereich ω gehören, setzen wir nach dem Gesagten gleich

$$(26) \quad W_s^{(i)} = \frac{1}{N_s^{(i)}!} \left(\frac{\omega}{h^3} \cdot \frac{P_i}{\sigma} \right)^{N_s^{(i)}}$$

Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit, auf das ganze System bezogen, ist dann gleich dem Produkt aller $W_s^{(i)}$.

Wie man in derselben Weise leicht findet, gilt (26) auch für mehratomige Moleküle. Sind in einem Molekül a -Atome vorhanden, so hat das Molekül $3a-3$ innere Freiheitsgrade. P_i wird dann durch die Festsetzung definiert, daß die apriorische Wahrscheinlichkeit des i -ten Quantenzustandes gleich der eines Phasengebiets der Größe $P_i \cdot h^{3a-3}$ ist. σ hat hier auch andere Werte als 1 und 2.¹⁾

Setzen wir in (26)

$$(27) \quad N_s^{(i)} = F_s^{(i)} \cdot \omega,$$

und wenden in gewöhnlicher Weise die Formel von Stirling an, so ergibt sich

$$(28) \quad W_s^{(i)} = \left(\frac{e P_i}{F_s^{(i)} \sigma h^3} \right)^{F_s^{(i)} \cdot \omega}$$

und

$$(29) \quad S^{(i)} = k \sum_{(s)} \ln W_s^{(i)} = k \int \left[F^{(i)} - F^{(i)} \ln F^{(i)} + F^{(i)} \ln \left(\frac{P_i}{\sigma h^3} \right) \right] d\omega.$$

Hier ist $S^{(i)}$ die Entropie des Systems der in dem i -ten Quantenzustand befindlichen Moleküle. In dem letzten Ausdruck ist die Summe durch ein Integral ersetzt. Es ist

$$d\omega = dp_1 dp_2 dp_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

gleich dem Differentialprodukt der Koordinaten und Impulse des Schwerpunkts. Wir haben ferner statt $F_s^{(i)}$ einfach $F^{(i)}$ gesetzt. Das Integral ist über alle Koordinaten und Impulse des Schwerpunkts auszudehnen.

Die Definition der Entropie können wir auch folgendermaßen ausdrücken. Es seien in jedem Molekül a Atome vorhanden. Dann ist der μ -Raum $6a$ -dimensional. Haben N_r Mole-

1) Vgl. P. Ehrenfest u. V. Trkal, a. a. O.

küle ihre Phasenpunkte in der r -ten Phasenzelle ω ($6a$ -dimensional!), so ist die entsprechende Teilentropie:

$$S_r = k \ln \left[\frac{1}{N_r!} \left(\frac{\omega}{g^a} \right)^{N_r} \right]$$

oder wenn N_r eine große Zahl ist:

$$S_r = k \ln \left(\frac{e \omega}{N_r} \right)^{N_r},$$

wenn wir $g = 1$ setzen. Es sei \mathfrak{B}_r das auf jedes Molekül im Mittel fallende Phasengebiet. Dann ist

$$\mathfrak{B}_r = \frac{\omega}{N_r}$$

und

$$(30) \quad S_r = k N_r \ln \mathfrak{B}_r + k N_r.$$

Summiert man über alle Molekülgruppen, so ergibt sich, wenn das für alle Moleküle berechnete geometrische Mittel von \mathfrak{B}_r mit $\widehat{\mathfrak{B}}$ bezeichnet wird, pro Molekül der Entropiewert

$$(31) \quad \frac{S}{N} = k \ln \widehat{\mathfrak{B}} + k.$$

Das zweite Glied ist ohne Belang, wenn die Molekülzahl nicht geändert wird, kommt aber bei der Berechnung des Dissoziationsgleichgewichts in Betracht.

Hiernach ist ein beliebiges Dissoziationsgleichgewicht leicht zu berechnen. Man sucht in gewöhnlicher Weise das Maximum der totalen Entropie mit den Nebenbedingungen, daß die verschiedenen Atomzahlen, die totale Energie und das Volumen (das Integrationsgebiet) konstant sind. Die Entropie eines Gases mit zusammengesetzten Molekülen ergibt sich aus (29) durch Summation aller $S^{(i)}$, die eines einatomigen Gases aus demselben Ausdruck, wenn man $\frac{P_i}{\sigma} = 1$ setzt.

Das Gemisch bestehe aus einem mehratomigen Gas und den einatomigen Komponenten. Die Verteilungsfunktionen der letzteren bezeichnen wir mit $f_1, f_2, \dots, f_s, \dots$, die Atommassen mit $m_1, m_2, \dots, m_s, \dots$. In einem Molekül des ersteren Gases mögen bzw. $a_1, a_2, \dots, a_s, \dots$ Atome eingehen. Es ist dann die Variation der Entropie

$$S = k \sum_{(s)} \int [f_s - f_s \ln f_s - f_s \ln h^3] d\omega \\ + k \sum_{(i)} \int \left[F^{(i)} - F^{(i)} \ln F^{(i)} + F^{(i)} \ln \frac{P_i}{\sigma h^3} \right] d\omega$$

zu bilden mit den Nebenbedingungen, daß die Größen

$$N_s = \int f_s d\omega + a_s \sum_{(i)} \int F^{(i)} d\omega, \quad (s = 1, 2 \dots)$$

$$E = \sum_{(s)} \int \varepsilon f_s d\omega + \sum_{(i)} \int (\varepsilon + \varepsilon^{(i)}) F^{(i)} d\omega$$

konstant sind. ε bedeutet hier immer die Energie der Translationsbewegung. $\varepsilon^{(i)}$ ist die Energie der inneren Quantenzustände der Moleküle. Sind $k \ln a_s$ und $-1/T$ die Lagrange'schen Multiplikatoren, so ergibt sich

$$f_s = \frac{a_s}{h^3} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

$$F^{(i)} = \frac{a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \dots P_i}{\sigma h^3} e^{-\frac{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon}{kT}}.$$

Bezeichnet man die Zahl der Atome bzw. der Moleküle in der Volumeneinheit mit n_s bzw. n und $n^{(i)}$, so muß hier

$$\frac{a_s}{h^3} = \frac{n_s}{(2\pi m_s k T)^{3/2}}$$

$$\frac{a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \dots P_i}{\sigma h^3} e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}}{kT}} = \frac{n^{(i)}}{(2\pi k T \sum a_s m_s)^{3/2}}$$

sein. Hieraus folgt

$$(32) \quad \frac{n^{(i)}}{H(n, a_s)} = \frac{(\sum a_s m_s)^{3/2}}{H\left(\frac{3a_s}{2}\right)} \cdot \left(\frac{h^3}{2\pi k T}\right)^{3/2} (\sum a_s - 1) \cdot \frac{P_i}{\sigma} e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}}{kT}}.$$

Wenn noch andere Gase gegenwärtig sind, so wirkt dies auf das Resultat nicht ein. Aus (32) erhält man beliebige Gleichgewichte. P_i und σ kommen natürlich nur in der Verbindung P_i/σ vor. Man könnte diese Brüche die reduzierten Gewichte nennen.

Wie man sieht, ist im speziellen Falle (32) mit (8) gleichbedeutend.

Setzt man die gefundene Verteilungsfunktion in (29) ein, so erhält man als Entropie des aus N Molekülen bestehenden mehratomigen Gases

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} S = \sum S^{(i)} &= \frac{E}{T} + k N \ln \left[\frac{e}{n} \left(\frac{2\pi k T}{h^3} \sum a_s m_s \right)^{3/2} \right] \\ &+ k N \ln \left(\sum \frac{P_i}{\sigma} e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}}{kT}} \right), \end{aligned} \right.$$

wo E die ganze Energie bedeutet. Es wird mithin die freie Energie

$$(34) \quad \begin{cases} F = -kNT \ln \left[\frac{e}{n} \left(\frac{2\pi kT}{h^2} \sum a_s m_s \right)^{3/2} \right] \\ - kNT \ln \left(\sum \frac{P_i}{\sigma} e^{-\frac{\epsilon(i)}{kT}} \right). \end{cases}$$

Durch Differentiation von (33) nach E findet man nämlich, daß T die absolute Temperatur bedeutet.

Zur experimentellen Bestimmung der Quantengewichte.

Formel (3) bezieht sich auf einen einatomigen Dampf in Gleichgewicht mit dem einatomigen Kondensat oder auf einen zweiatomigen Dampf in Gleichgewicht mit dem zweiatomigen Kondensat. Man kann daraus P bestimmen. Es scheint P wenigstens für einatomige Stoffe gleich 1 zu sein.

Kombiniert man (3) mit (11), so berechnet man auch leicht den Druck eines chemisch einfachen zweiatomigen Dampfes über einem einatomigen Kondensat. Man erhält wieder einen Ausdruck der Form (3). Statt m geht die Molekülmasse $2m$ ein und statt P die Größe

$$P' = \frac{2P}{P_1}.$$

Hier ist P das Gewicht des Atomzustandes im Kondensat und P_1 das Gewicht des tiefsten Quantenzustandes des zweiatomigen Moleküls. Für Wasserstoff scheint P' gleich 1 zu sein, wenn diese Überlegung darauf angewandt werden kann. Setzt man nach dem Früheren $P = 1$, so müßte dann $P_1 = 2$ oder das entsprechende reduzierte Gewicht gleich 1 sein.

Es liegt nahe, allgemein die Wahrscheinlichkeit eines Quantenzustandes durch die Größe eines gewissen Phasengebiets auszudrücken. Man kann sich z. B. vorstellen, daß im Phasenraume die stabileren Quantenbahnen die Phasenpunkte eines angrenzenden Gebiets auffangen.

Wir denken uns zweiatomige Moleküle und nehmen an, daß die Temperatur nicht höher ist, als daß wir die Schwingungsenergie vernachlässigen können. Der Phasenraum des inneren Zustandes ist dann vierdimensional. Die durch die Quantenbedingungen ausgezeichneten Energieflächen teilen denselben in

Schalen ein. Die der Rotationsquantenzahl i entsprechende Energiefläche schließt das Phasenvolumen¹⁾

$$(ih)^2$$

ein. Das Volumen der innerhalb derselben gelegenen, angrenzenden Schale ist mithin gleich

$$(ih)^2 - (i-1)^2 h^2 = (2i-1)h^2,$$

das der äußeren Schale

$$(2i+1)h^2.$$

Die entsprechenden Werte der Gewichte wären $2i-1$ bzw. $2i+1$.

Der zweite Wert ist für Wasserstoff von Reiche²⁾ geprüft worden, ist aber mit dem gemessenen Verlauf der spezifischen Wärme unvereinbar. Der erste Wert ist meines Wissens nicht geprüft worden, führt aber für gewisse Temperaturen zu einer Rotationswärme, die größer als R ist, und muß daher auch unrichtig sein. Die beste Übereinstimmung mit den Messungen erhält man nach Bohr³⁾, Rotszajn⁴⁾ und Reiche, wenn man

$$(35) \quad P_i = 2i$$

setzt. Der Proportionalitätsfaktor ist für die spezifische Wärme ohne Belang. Die Korrespondenz zwischen klassischer und Quantenstatistik führt es aber mit sich, daß für große i $\frac{P_i}{i}$ sich asymptotisch dem Werte 2 nähern muß. Nach (35) ist auch $P_1 = 2$, was mit unserem früheren Resultat übereinstimmt.

Nimmt man an, daß der rotationslose Zustand ($i=0$) nicht vorkommt, so kann man aus der spezifischen Wärme das Verhältnis zwischen P_2 und P_1 direkt bestimmen. Nach (35) ist das Verhältnis gleich 2, nach den früheren Annahmen 3 bzw. 1,67.

1) Vgl. N. Bohr, Abhandlungen über Atombau, S. 143. Braunschweig 1921.

2) F. Reiche, Ann. d. Phys. 58. S. 657. 1919.

3) N. Bohr, a. a. O., S. 148.

4) Sophie Rotszajn, Ann. d. Phys. 57. S. 81. 1918.

Ist E_R die Rotationsenergie, C_R die Rotationswärme pro Mol, und setzen wir

$$Q = \sum P_i e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}}{kT}},$$

$$\tau = \frac{1}{kT},$$

so wird

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} E_R &= -\frac{R}{k} \cdot \frac{d \ln Q}{d \tau} = -\frac{R}{k} \cdot \frac{Q'}{Q}, \\ C_R &= \frac{R}{k^2 T^2} \cdot \frac{Q Q'' - Q'^2}{Q^2} \\ &= \frac{R}{k^2 T^2} \cdot \frac{\sum \sum P_i P_k (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(k)})^2 e^{-\frac{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(k)}}{kT}}}{\left(\sum P_i e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}}{kT}} \right)^2} \quad (i > k). \end{aligned} \right.$$

Bei hinreichend tiefer Temperatur sind die ersten Summenglieder groß im Vergleich mit den übrigen. Es ergibt sich daher

$$(37) \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{C_R}{R} \left(\frac{\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}}{kT} \right)^{-2} \cdot e^{\frac{\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}}{kT}}.$$

Hier kann $\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}$ aus optischen Messungen bestimmt werden. Mit Anwendung der Formel

$$\varepsilon^{(i)} = i^2 \cdot \frac{h^2}{8\pi^2 J},$$

wo J das Trägheitsmoment ist, habe ich die Rechnung für Wasserstoff bei 100° absolut gemacht und angenommen:

$$J = 1,90 \cdot 10^{-41}, \quad \frac{C_R}{R} = 0,222.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{P_2}{P_1} = 2,96.$$

Das Resultat stimmt vollkommen mit der zuerst angenommenen Formel $P_i = 2i - 1$. Um den aus (35) folgenden Wert zu erhalten, muß man einen größeren Wert von J annehmen, nämlich $2,09 \cdot 10^{-41}$. Man muß aber in Betracht ziehen, daß der Wert der spezifischen Wärme nicht sehr sicher ist, und dies gilt wohl auch von dem J -Werte.

1) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. S. 535. Dritte Aufl. 1922.

Umformung einiger Ausdrücke.

In besonderen Fällen nimmt (9) oder (11) eine einfachere Gestalt an. Bei hinreichend tiefer Temperatur befinden sich beinahe alle Moleküle in dem tiefsten Quantenzustand. Es reduziert sich dann die in den erwähnten Ausdrücken vorkommende Summe auf das erste Glied. Wendet man die Formel auf das System neutrale Atome — freie Elektronen — positive Ionen an, und nimmt man außerdem $P_1 = 1$ an, so erhält man dieselbe Formel, aus der Saha¹⁾ die Ionisation in den Sternatmosphären berechnet hat. Für die Gültigkeit der Formel ist erforderlich, daß die Temperatur nicht zu hoch ist.

In anderen Fällen kann man von den Atomschwingungen absehen und die Summe durch ein Integral ersetzen. Hier wie überhaupt bei der Anwendung der Formeln muß man aber folgenden Umstand berücksichtigen. Wenn die Anziehung zwischen den Atomen schneller als nach der umgekehrten dritten Potenz des Abstandes abnimmt, so kann sowohl die Rotations- wie die Schwingungsquantenzahl nicht gewisse Grenzen überschreiten. Ich gedenke demnächst eine nähere Untersuchung einiger hiermit zusammenhängender Fragen zu geben.

Sind φ und ϑ Polarkoordinaten, welche die Richtung der Molekülachse bestimmen, so ist die innere Energie des Moleküls

$$\varepsilon = \frac{J}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) - q,$$

wo J das Trägheitsmoment und $-q$ die potentielle Energie bedeutet. Führen wir die Impulse p_ϑ und p_φ ein, so wird

$$\varepsilon = \frac{p_\vartheta^2}{2J} + \frac{p_\varphi^2}{2J \sin^2 \vartheta} - q.$$

Es wird

$$h^2 \sum P_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} = e^{-\frac{q}{kT}} \int \dots \int e^{-\frac{p_\vartheta^2}{2JkT} - \frac{p_\varphi^2}{2J \sin^2 \vartheta kT}} d\vartheta d\varphi dp_\vartheta dp_\varphi.$$

Die Rotationsenergie im Exponenten des Integranden kann einen Maximumwert ε_m nicht überschreiten. Wenn J und ε_m als Konstanten angenommen werden, so ist das Integral leicht zu berechnen. Es ergibt sich, wenn man den Wert

1) M. N. Saha, Zeitschr. f. Phys. 6. S. 40. 1921.

$$J = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot s^2 = \mu s^2$$

(s Abstand der Atomzentra) einsetzt:

$$(38) \quad \frac{n}{n_1 n_2} = \frac{4\pi h s^3}{\sigma (2\pi \mu k T)^{3/2}} e^{\frac{q}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{\epsilon_m}{kT}}\right).$$

Der Wert von ϵ_m ist in speziellen Fällen leicht anzugeben. Wenn mit wachsender Entfernung der Atome die Anziehung langsamer als nach der umgekehrten dritten Potenz des Abstandes abnimmt, so ist $\epsilon_m = q$. Wenn die Anziehung der r ten Potenz der Entfernung verkehrt proportional ist ($r > 3$), und wenn außerdem bei Berührung die Atome sich wie harte Kugeln verhalten, so wird $\epsilon_m = \frac{1}{2}(r-1)q$.¹⁾

Ist ϵ_m sehr groß, so verschwindet das entsprechende Glied in (38). Die Gleichgewichtskonstante nimmt den Wert an, den man thermodynamisch aus den von Tetrode, Stern, Ehrenfest und Trkal gegebenen Entropieausdrücken ein- und zweiatomiger Gase erhält.²⁾

Die mittlere Rotationsenergie wird, wenn man wieder die Summe durch ein Integral ersetzt:

$$\frac{\int \dots \int \left(\frac{p_\phi^2}{2J} + \frac{p_\varphi^2}{2J \sin^2 \vartheta} \right) e^{-\frac{p_\phi^2}{2JkT} - \dots} d\vartheta d\varphi dp_\phi dp_\varphi}{\int \dots \int e^{-\frac{p_\phi^2}{2JkT} - \dots} d\vartheta d\varphi dp_\phi dp_\varphi}.$$

Die Integrationsgrenzen sind dieselben wie früher. Es ergibt sich der Wert

$$(39) \quad kT - \frac{\epsilon_m}{e^{\frac{\epsilon_m}{kT}} - 1}$$

statt kT . Die mittlere Rotationsenergie kann folglich, wenn ϵ_m endlich ist, den Gleichverteilungswert nicht erreichen. Das Verhältnis unseres Wertes zu kT nähert sich mit steigender Temperatur dem Werte Null. Die mittlere Rotationsenergie selber nähert sich asymptotisch dem Werte $\epsilon_m/2$.

Das zweite Glied von (39) hat, vom Vorzeichen abgesehen, dieselbe Form wie der Plancksche Ausdruck der mittleren

1) Die Formeln (38) und (39) beziehen sich nicht auf diesen Fall.

2) Vgl. S. 321, 322 und 323.

Energie eines Oszillators. Das Glied kommt jedoch nicht als Resultat einer Quantelung heraus. Bei der Berechnung desselben ist im Gegenteil die un stetige Verteilung der Energiewerte durch eine stetige ersetzt.

Bezüglich der Formeln (38) und (39) muß hervorgehoben werden, daß sie nicht bei tiefen Temperaturen gelten können. Hier ist die Integration nicht zulässig. Bei hohen Temperaturen sind sie aber im allgemeinen auch nicht gültig. Hier muß die Schwingungsenergie berücksichtigt werden.

In gewöhnlichen Gasen muß man zufolge der Kohäsionskräfte eine Assoziation erwarten. Bei hinreichend kleinen Dichten kommen praktisch nicht Aggregate von mehr als zwei Molekülen vor. Die Zahl der Aggregate kann man dann bei einatomigen Gasen nach Formel (11) berechnen.

Auf Grund der Kleinheit der potentiellen Energie wirkt es hier relativ sehr stark auf die Verhältnisse ein, ob $P_0 = 0$ ist oder nicht. Im letzten Falle wird die Assoziation unter Umständen bedeutend größer.

Ist $P_0 = 0$, so ist die kleinste Rotationsenergie, die vorkommen kann, gleich $h^2/8\pi^2 J$. Soll Assoziation überhaupt vorkommen, so muß diese Größe kleiner als ϵ_m sein. Nun nimmt im großen q und mithin ϵ_m mit abnehmendem Molekulargewicht ab. Dasselbe gilt von J . Bei den leichteren Elementen könnte es demnach vorkommen, daß zufolge der erwähnten Bedingung die Assoziation unmöglich wird. Die Einsetzung der Zahlenwerte zeigt, daß dies höchstens bei Helium und Wasserstoff der Fall sein kann, wahrscheinlich aber auch nicht hier.

(Eingegangen 14. Mai 1923.)

2. Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen.

II. Fortsetzung und Schluß¹⁾;

von Carl Ramsauer.

Die in Teil II ausgesprochene Absicht, die Untersuchung auf die noch fehlenden Edelgase Krypton und Xenon auszudehnen, konnte jetzt infolge weitgehenden Entgegenkommens der technischen Physik zur Ausführung gebracht werden. Für das Krypton spreche ich der Badischen Anilin- und Sodafabrik, besonders Hrn. Dr. Hochheim, für das Xenon der Aktiengesellschaft Julius Pintsch, besonders Hrn. Dr. Schröter, meinen herzlichsten Dank aus.

Beide Proben waren von durchaus genügender Reinheit. Für das Krypton kommen nur zu vernachlässigende Beimengungen von X und Spuren von Kohlenwasserstoffen, für das X schätzungsweise 0,1 Proz. Kr und vielleicht etwas CO₂ in Frage. Da sich bei den vorliegenden Untersuchungen die Wirkungen zweier Gase lediglich addieren, wie in Teil II an der Kombination O₂ und A näher nachgewiesen ist, so sind diese geringen Beimengungen außerstande, Merkmale, welche den reinen Gasen nicht zukommen, vorzutäuschen oder auch nur den Verlauf der aufgenommenen Kurven merklich zu beeinflussen.

Die Meßmethoden und Kontrollmaßnahmen sind durchweg die gleichen geblieben, wie in Teil II, obgleich die ganze Meßanordnung infolge meiner Übersiedlung nach Danzig neu

1) Vgl. Ann. d. Phys. 64. S. 513—540. 1921; 66. S. 546—558. 1921.
(Im weiteren Texte kurz als Teil I und Teil II angeführt.)

aufgebaut werden mußte. Die Herstellung des Vakuums erfolgte mit einem aus Diffusionspumpe und Dampfstrahlpumpe bestehenden Aggregat, die Kühlung in der Hauptsache mit flüssiger Luft, bei einigen Kontrollversuchen mit fester CO_2 in Alkohol.¹⁾

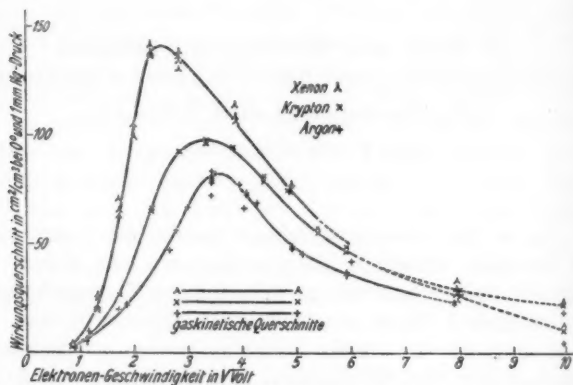


Fig. 1.

Die gesamten Versuchsergebnisse sind in der folgenden Kurvendarstellung (Fig. 1) niedergelegt. Die A-Kurve des Teils II ist wieder eingezeichnet, mit der Erweiterung bis 64 Volt und

1) Diese Kontrolle sollte einen etwaigen, allerdings sehr unwahrscheinlichen Einfluß der Kühlung auf das X feststellen. Das X zeigte nämlich ganz am Schluß der etwa eine Woche andauernden Messungsreihe plötzlich bei der Temperatur der flüssigen Luft kondensationsartige Erscheinungen mit einer annähernden Druckkonstanz von etwa 0,008 mm, nachdem es sich vorher bis zu Drucken von 0,08 mm als Gas benommen hatte, wie auch entsprechend dem Dampfdruck von rund 0,4 mm (berechnet nach Henglein, Zeitschr. f. Elektrochemie 1920, S. 431) zu erwarten gewesen war. Die Kontrolle ergab jedoch durchaus die gleichen Werte für folgende drei Fälle: Kühlung mit flüssiger Luft bei dampfartigem Verhalten des X, Kühlung mit flüssiger Luft bei gasartigem Verhalten des X und Kühlung mit fester CO_2 in Alkohol. Es handelte sich offenbar um eine Adsorptionserscheinung an der Glaswand, vielleicht in Verbindung mit der steigenden Kondensation von Hg- und sonstigen Dämpfen, ohne daß hierdurch die gasförmige Phase irgendwie beeinflußt wurde. Bei Kr und A kommen derartige Erscheinungen infolge des höheren Dampfdrucks überhaupt nicht in Frage.

mit der Wiederholung einiger Punkte zum Anschluß des Meßverfahrens an Teil II. Die Kontrollpunkte fallen durchweg in den Verlauf der Kurve, namentlich wurde auch die Lage des Maximums durchaus bestätigt¹⁾; nur der Punkt für 36 Volt, welcher schon bei den früheren Messungen aus dem Kurvenzuge herausfiel, erwies sich als tatsächlich merklich tiefer liegend.

Bei der Diskussion der Kurven sind drei Hauptgebiete zu unterscheiden:

1. *Das Gebiet des Kurvenanstiegs.* Auch Kr und X zeigen die von mir gefundene abnorme Durchlässigkeit des A für die geringsten benutzten Elektronengeschwindigkeiten — die beobachteten Werte gehen bis unter $\frac{1}{7}$ der zugehörigen gas-kinetischen Querschnitte herunter! — und den darauffolgenden steilen Anstieg. Es wurde viel Mühe darauf verwandt, den Anfangsverlauf der Kurven genau festzulegen, infolge der sehr großen experimentellen Schwierigkeiten bleibt hier aber eine gewisse Unsicherheit bestehen. Von diesen zahlreichen Messungen sind der Übersichtlichkeit wegen für jedes Gas nur die tiefsten überhaupt gefundenen Punkte eingetragen; der Kurvenverlauf ist in diesem Bereich punktiert gezeichnet. Was speziell die gegenseitige Lage der Kurven zueinander betrifft, so verläuft die X-Kurve jedenfalls bis zur Grenze der Messungen oberhalb der beiden anderen Kurven, ob dagegen die Kr-Kurve entsprechend dauernd oberhalb der A-Kurve bleibt, ist nicht ganz einwandfrei zu entscheiden. Eine Extrapolation der Kurven über die letzten Meßwerte hinaus ist noch weniger möglich; trotz sorgfältiger Prüfung aller gefundenen Werte finden sich keinerlei bestimmte Andeutungen, ob die Kurven nach O hinzielen oder sich nach Durchlaufung eines Minimums wieder heben. Es

1) Die von Hrn. Hertz nach einer relativen Methode ermittelte Voltzahl des Maximums — rund 10 — ist daher jedenfalls zu gering (vgl. G. Hertz, Over de gemiddelde weglengte van langzaam loopende electronen in neon en argon; Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Veralag van de Gewone Vergaderingen der Wis-en Natuurkundige Afdeeling, Deel XXXI, Nos. 3 en 4). Sie widerspricht übrigens auch den mit meinen Messungen übereinstimmenden Werten Hrn. H. F. Mayers von 12—13 Volt (Ann. d. Phys. 64. S. 471. 1921), obgleich die Mayersche Methode der Hertzschen viel näher steht als der meinigen.

wird zurzeit versucht, diese Frage in wesentlich anderer Art zu behandeln, da die hier benutzte Methode bei etwa 0,75 Volt Elektronengeschwindigkeit an der Grenze ihrer Leistungsfähigkeit angelangt ist.

2. *Das Gebiet des Kurvenmaximums.* Kr und X zeigen auch in dieser Beziehung ein gleichartiges Verhalten wie A. Die folgende Tabelle gibt eine zahlenmäßige Übersicht:

Gas	Ordnungszahl	Lage des Maximums in Volt	maxim. Wirkungsquerschnitt
			gaskinet. Querschnitt ¹⁾
A	18	18,2	4,4
Kr	36	11,3	4,2
X	54	6,4	4,9

Mit steigender Ordnungszahl rücken also die Maxima nach kleineren Elektronengeschwindigkeiten hin und nehmen gleichzeitig an absoluter Größe zu; den gaskinetischen Querschnitten gegenüber zeigen alle drei Gase annähernd die gleiche Verhältniszahl.

3. *Das Gebiet des Kurvenabfalls.* Der Verlauf der Kurven vom Maximum bis etwa 36 Volt bei A und Kr und bis mindestens 25 Volt bei X ist durch zahlreiche Punkte einwandfrei festgelegt. Die drei Kurven verlaufen ziemlich parallel in der Reihenfolge der Ordnungszahlen übereinander.

Der darauffolgende weitere Abfall bedarf dagegen einer eingehenden Erörterung. Die Erklärung der beobachteten Erscheinungen ist allerdings nicht restlos befriedigend, die Erscheinung selbst tritt aber experimentell so eindeutig hervor, daß ich sie nicht übergehen möchte, obgleich man die ganze Untersuchung ruhig wie im Teil II bei etwa 36 Volt abschließen könnte. Die Fortsetzung der Messungen bis 100 Volt ergab für alle drei Gase ein starkes Ansteigen des „Wirkungsquerschnitts“ mit dem benutzten Gasdruck, während bis 36 Volt kein derartiger Fall beobachtet werden konnte, und

1) Q_c corr. Landolt und Börnstein, 1912.

während besondere Versuche (Teil II, S. 555) die völlige Unabhängigkeit des maximalen Wirkungsquerschnitts von Druck in weiten Grenzen bewiesen hatten. Die betreffenden Werte für X sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; die Stoßzahl ist berechnet für den Gesamtweg entsprechend dem gaskinetischen Querschnitt des X.

Volt	Druckgebiet mm/10 000	Stoß- zahl	„Wirkungs- querschnitt“
64	0—107	2,0	24,6
	0—208	4,0	27,5
	0—220	4,2	29,9
	107—365	6,9	33,7
100	0—77	1,5	13,2
	0—152	2,9	13,3
	0—184	3,5	13,3; 11,5
	0—320	6,1	18,8; 18,8
	320—628	11,9	24,0

Die Erscheinung hängt wahrscheinlich mit der endlichen Größe des Strahlquerschnitts zusammen, nämlich derart, daß bei der benutzten Geschwindigkeit schon häufigere Ablenkungen infolge von Diffusion und Geschwindigkeitsverlust vorkommen, welche zu schwach sind, um in der Mehrzahl der Fälle bei ihrem *einmaligen* Auftreten das Elektron aus dem Strahlenbündel auszuschneiden, und daher erst bei mehrmaligem Auftreten, d. h. bei höheren Drucken zu wirken beginnen. Das Anfangen dieser Ablenkungen zeigt sich übrigens auch in der mit steigender Geschwindigkeit immer mehr wachsenden Verbreiterung der Verteilungskurve bei Einführung des Gases, während die Verteilungskurve bei 12 Volt noch so gut wie gar nicht vom Gase beeinflusst wird (Teil II, S. 556).

Wenn diese Schlußfolgerungen richtig sind¹⁾, so würde

1) Die in diesem Gebiet ebenfalls immer stärker werdende Sekundärstrahlung für Gas und Metall spielt keine merkliche Rolle, da die Auffangung der Elektronen in Faradayschen Käfigen erfolgt, und da außerdem experimentell gezeigt werden konnte, daß die mehr oder minder großen Aufladungen der Käfige ohne Einfluß auf die maßgebenden Verhältniszahlen waren.

also von etwa 36 Volt an bei der benutzten Versuchsanordnung die logische Unterscheidung zwischen dem gesamten Wirkungsquerschnitt und dem absorbierenden Querschnitt diejenige praktische Bedeutung gewinnen, welche im Beginn der ganzen Arbeit (Teil I) vergeblich für weit geringere Geschwindigkeiten gesucht worden war. Mit anderen Worten: bei etwa 36 Volt Elektronengeschwindigkeit teilt sich der bisher identische Verlauf des gesamten Wirkungsquerschnitts und des absorbierenden Querschnitts merklich¹⁾ in einen höher verlaufenden und einen tiefer verlaufenden Zweig, entsprechend dem gesamten Wirkungsquerschnitt und dem nur einen Teil desselben bildenden absorbierenden Querschnitt. Dies ist der Übersichtlichkeit wegen nur für die *Kr*-Kurve veranschaulicht, wobei — allerdings ohne quantitative Berechtigung — die kleinsten gefundenen Werte als absorbierende Querschnitte und die größten gefundenen Werte als gesamte Wirkungsquerschnitte genommen worden sind; für A und X sind bei der Geschwindigkeit 100 Volt lediglich die gefundenen Extremwerte eingetragen. (Die wirkliche Berechnung der beiden Querschnitte würde eine *sehr* weitgehende Diskussion der geometrischen Verhältnisse der ganzen Methode verlangen, wie sie schon bei wesentlich einfacherer Sachlage zu erheblichen Komplikationen führt.²⁾ Diese ganze Entwicklung beginnt übrigens bei den drei Gasen für verschiedene Geschwindigkeiten: bei 64 Volt zeigt A die Erscheinung noch nicht, Kr andeutungsweise und X bereits in ausgeprägtem Maße; demgemäß ist der Kurvenlauf bei X am frühesten, schon unterhalb 36 Volt, bei A am spätesten durch Punktierung als nicht mehr eindeutig gekennzeichnet.³⁾

1) Die in der Verbreiterung der Verteilungskurven liegende Andeutung für diese Trennung setzt schon früher, schätzungsweise bald nach Überschreitung der Kurvenmaxima, ein.

2) Vgl. C. Ramsauer, Über eine direkte magnetische Methode zur Bestimmung der lichtelektrischen Geschwindigkeitsverteilung. *Ann. d. Phys.* 45. S. 988 ff. 1914.

3) Diese Reihenfolge der Gase entsprechend ihrem Molekulargewicht steht durchaus im Einklang mit den von Hrn. Lenard entwickelten Anschauungen über die Diffusion der Kathodenstrahlen, Heidelberg *Ak. d. Wiss.* 1918. 5. Abh., Abschnitt VII, besonders S. 206. („Es gibt daher jedes einzelne Molekül um so mehr Strahlkrümmung bei einer Durchquerung, je schwerer es ist.“)

Zur Vermeidung von Mißverständnissen möge nochmals hervorgehoben werden, daß der Verlauf der Kurven bis mindestens 30 Volt, dessen Ermittlung die Hauptaufgabe der vorliegenden Untersuchung war, völlig eindeutig und sichergestellt ist und in keiner Weise von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser mehr qualitativen Betrachtungen abhängt.

Zusammenfassung der Versuchsergebnisse für Teil I—III:

1. Es werden Methoden angegeben, um bei einheitlichen, magnetisch definierten Elektronengeschwindigkeiten den gesamten Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen als Funktion der Elektronengeschwindigkeit absolut zu bestimmen (Teil I und II).

2. Der gesamte Wirkungsquerschnitt und der absorbierende Querschnitt fallen bei den in dieser Beziehung untersuchten Gasen (H_2 , N_2 , He, A) für kleinste Geschwindigkeiten zusammen (Teil I und II). [Dagegen sind Andeutungen vorhanden, daß sich diese beiden Größen für A, Kr und X zwischen 30 und 70 Volt schon deutlich zu trennen beginnen, und zwar um so früher, je höher die Ordnungszahl ist (Teil III).]

3. Alle Edelgase (He, Ne, A, Kr, X) zeigen gegenüber den sonstigen bisher untersuchten Gasen (wie H_2 , N_2 , CO_2) die gemeinsame Eigentümlichkeit, daß der Wirkungsquerschnitt mit abnehmender Elektronengeschwindigkeit ein Maximum erreicht und dann wieder abfällt.

4. Die Edelgase A, Kr, X zeigen die unter 3 gekennzeichnete Eigentümlichkeit in zweifacher Beziehung besonders stark ausgeprägt: der Wirkungsquerschnitt steigt im Maximum auf das 4 bis 5 fache des gaskinetischen Querschnitts und sinkt bei dem kleinsten untersuchten Geschwindigkeitswert von etwa 0,75 Volt auf unter $\frac{1}{7}$ des gaskinetischen Querschnitts herab. (Über den weiteren Verlauf unterhalb 0,75 Volt läßt sich nichts Bestimmtes aussagen.)

5. Die Edelgase Ne, A, Kr, X zeigen in bezug auf Lage und Höhe ihrer Maxima einen ausgesprochenen Gang: mit steigender Ordnungszahl (10; 18; 36; 54) wächst das Maximum absolut genommen stark an (Wirkungsquerschnitt in cm^2/cm^2)

für 0° und 1 mm Hg = 13; 82; 98; 141) und rückt außerdem zu immer kleineren Elektronengeschwindigkeiten hin ($\text{Volt}_{\text{max.}} = 25; 13,2; 11,3; 6,4$).

Zum Schlusse möchte ich nicht versäumen, auch an dieser Stelle der Helmholtzgesellschaft für die Überlassung der notwendigen Apparate und dem Japanausschuß der Notgemeinschaft für Gewährung der laufenden Mittel meinen besten Dank auszusprechen.

Danzig, im April 1923.

(Eingegangen 26. April 1923.)

3. *Über die Beugungserscheinungen bei sphärischer
Aberration;
von Johannes Fischer.*

(Gekürzte Münchener Dissertation.)

Einleitung.

In einem mit sphärischer Aberration behafteten Bündel bilden die Strahlen das Normalensystem einer Rotationsfläche oder einer Zylinderfläche, je nachdem das Bündel räumlich oder eben ist. Im folgenden beschränken wir uns auf den ebenen Fall, wie er etwa in sphärisch nicht korrigierten Zylinderlinsen verwirklicht ist. Zur Berechnung der Intensität ist eine bestimmte Annahme über die Wellenfläche nötig; wir nehmen einen parabolischen Zylinder an, da sich eine beliebige zylindrische Wellenlänge für nicht zu große Öffnung des Bündels durch den oskulierenden parabolischen Zylinder ersetzen läßt. Weiterhin setzen wir das einfallende Bündel als symmetrisch zu einer Achse voraus; Brennnlinie wird dann die Evolute der Parabel, die einfachste Kurve mit Spitze; da sie von der dritten Klasse ist, gehen durch einen ihrer inneren Punkte höchstens drei Strahlen des Bündels, von denen zwei zusammenfallen, wenn der Aufpunkt sich der Brennnlinie nähert.

Vom Gesichtspunkt der Beugung aus hat als erster G. Airy¹⁾ die Intensitätsverteilung in der Nähe eines regulären Bogens einer Brennnlinie bei weit geöffnetem Bündel berechnet. Lord Rayleigh²⁾ und Mascart³⁾ haben die Airy'schen Rechnungen erweitert auf den Fall einer endlichen Öffnung des Bündels und stellen Ausdrücke für die Intensitäts-

1) G. Airy, Trans. of the Cambr. Phil. Soc., T. VI, Part III, p. 379. 1838; T. VIII, Part V, p. 593. 1848.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 8. p. 403 ff. 1879 oder Scientific Papers Vol. I, p. 428 ff.

3) E. Mascart, Traité d'optique 1. p. 407. Paris 1889.

verteilung in der Brennebene eines Bündels auf, die senkrecht zur Achse durch die Spitze einer Brennnlinie gezogen ist.

Eine zusammenfassende Theorie aller Linsenfehler hat K. Strehl¹⁾ gegeben. Die von ihm aufgestellten Entwicklungen nach Besselschen Funktionen, die zur Intensitätsverteilung bei sphärisch nicht korrigierten Zylinderwellen führen, sind wegen zu langsamer Konvergenz zu numerischen Rechnungen wenig geeignet.

Nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit wurde mir eine Arbeit von L. Brillouin²⁾ bekannt, der im wesentlichen denselben Gegenstand nach der auch von uns benutzten Methode der Sattelpunkte behandelt; numerische Rechnungen fehlen bei Brillouin völlig.

Zur Rechtfertigung der vorliegenden erneuten Behandlung der Beugung bei sphärisch nicht korrigierten Systemen sei außer auf die ausgedehntere zahlenmäßige Auswertung der Ergebnisse vor allem auf die zur Anwendung kommende Methode verwiesen.

Zunächst wird (in § 1) auf Grund des Huygensschen Prinzips in der Kirchhoffschen Fassung ein in der ganzen Ebene gültiger Ausdruck für den Lichtvektor aufgestellt. Die Ableitung schließt sich an eine Arbeit von Debye³⁾ an: der das Lichtbündel begrenzende Schirm wird in unendliche Entfernung verlegt, wodurch die Rechnung nicht nur einfacher, sondern auch strenger wird. Die Diskussion des erhaltenen Integrals erfolgt auf dem Wege, der allein der Eigenart der zu diskutierenden Funktion angepaßt ist: wir lassen die Integrationsvariable komplexe Werte annehmen und deformieren den Integrationsweg so, daß er möglichst lange durch solche Gebiete geht, in denen der Integrand exponentiell verschwindet; es bleibt dann das Integral lediglich in der Nähe einzelner Punkte, der Sattelpunkte, auszuwerten (§ 2—4). Riemann⁴⁾

1) K. Strehl, Theorie des Fernrohrs auf Grund der Beugung des Lichts, I. Teil, Leipzig 1894; Einführung in die beugungstheoretische Optik, Berlin 1907; ferner zahlreiche Arbeiten, besonders in der Zeitschr. für Instrumentenkunde und in der Zentralzeitung für Optik u. Mechanik.

2) L. Brillouin, Ann. scient. de l'école normale supérieure, T. 33, p. 17. 1916.

3) P. Debye, Ann. d. Phys. 30. S. 755. 1909.

4) B. Riemann, Ges. math. Werke, S. 400. Leipzig 1876.

hat zuerst diese Methode gelegentlich einmal verwendet; unabhängig von ihm hat sie Debye¹⁾ benutzt zur Ableitung von halbkonvergenten Entwicklungen für die Zylinderfunktionen.

Es ist bemerkenswert, daß den Sattelpunkten der komplexen Ebene gerade die geometrischen Lichtstrahlen entsprechen, die in der Einfallsebene des Lichtes durch den Aufpunkt hindurchgehen, und den Integralen über die Sattelpunkte die Lichtbewegung, wie sie sich nach den Gesetzen der geometrischen Optik ergibt, wenn nur der Aufpunkt nicht in nächster Nähe der Brennnlinie liegt (§ 5). Zu beachten ist dabei, daß die geometrischen Strahlen, die bis zum Eintreffen im Aufpunkt die Brennnlinie bereits passiert haben, mit einer Phasenbeschleunigung von $\pi/2$ zu versehen sind. Man erhält also für Aufpunkte, die nicht zu nahe der Brennnlinie liegen, die Lichtbewegung einfach dadurch, daß man die durch den Aufpunkt gehenden geometrischen Strahlen, event. unter Berücksichtigung der Phasendifferenz $\pi/2$, zur Interferenz bringt. Diese Methode hat Mascart²⁾ ohne nähere Begründung zur Berechnung des Regenbogens und der überzähligen Bogen verwendet. Auch Möbius³⁾ wendet sie neben der graphischen Integration auf dasselbe Problem an und berechnet in einer anderen Arbeit⁴⁾ die Phasenverzögerung für beliebige Wellenflächen.

Diese Phasenverzögerung entspricht dem von Gouy⁵⁾ theoretisch gefundenen und experimentell bestätigten „anormalen Verhalten“ der Phase beim Durchgang des Lichtes durch Brennpunkte. Sie ist aber auch ohne Beugungstheorie verständlich, wenn man von der der geometrischen Optik entsprechenden unstetigen Lösung der optischen Differentialgleichung ausgeht. Fassen wir nämlich die den Kreiszyklinderwellen (für nicht zu kleine r) entsprechende Lösung

$$\sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i k r - i \frac{\pi}{4}}$$

1) P. Debye, Math. Ann. 67. S. 535. 1909; Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. 1910. S. 3.

2) E. Mascart, Traité d'optique 1. p. 398. Paris 1889.

3) W. Möbius, Ann. d. Phys. 33. S. 1493. 1910.

4) W. Möbius, Ann. d. Phys. 33. S. 79. 1910.

5) L. G. Gouy, Compt. rend. 110. p. 1251. 1890; 111. p. 33 u. 910. 1890; Ann. de Chim. et Phys. 24. p. 145. 1891.

als Quelle im Nullpunkt auf, so haben wir keinen Grund, irgendeine Richtung von r von der entgegengesetzten zu unterscheiden, das Vorzeichen von r wird für alle Richtungen das gleiche positive sein. Nehmen wir dagegen an, daß einfallendes Licht, das in größerer Entfernung durch obigen Ausdruck dargestellt ist, in den Brennpunkt $r = 0$ konzentriert wird, so hat man offenbar das Vorzeichen von r zu berücksichtigen, aber nicht nur im Exponenten, sondern auch im

Amplitudenfaktor; dies gibt aber einen Faktor $e^{i\frac{\pi}{2}}$, den Gouy und andere Autoren als „anomale Phasenänderung“ ansprechen. Im Falle der Kugelwellen wurde als „Phasensprung“ π gefunden¹⁾; ersetzen wir r in $\frac{e^{ikr}}{r}$ durch $-r$, so erhalten wir in der Tat das negative Zeichen, d. h. einen Faktor $e^{i\pi}$.

Die einfache Superposition der geometrischen Lichtstrahlen ist in nächster Nähe der Brennnlinie nicht mehr zulässig. Die in diesem Fall auftretenden Beugungserscheinungen werden in § 6 diskutiert. Die Intensitätsverteilung in der Brennebene und auf der Achse des Bündels ist in § 7 und 8 berechnet.

Alle diese Entwicklungen gelten zunächst nur für Lichtbündel von einer Öffnung von 180° ; in § 9 ergibt sich, daß der beugende Einfluß der geradlinigen Begrenzung des Bündels auf den Lichtvektor von höherer Ordnung mit abnehmender Wellenlänge verschwindet, wenn nur der Aufpunkt nicht in zu großer Nähe der Randstrahlen liegt. Unter dieser Voraussetzung gelten also die Entwicklungen der früheren Paragraphen auch für Bündel endlicher Öffnung. Die Beugungserscheinungen beim Übergang über die Randstrahlen werden durch Fresnelsche Integrale wiedergegeben.

§ 1. Ableitung aus dem Huygensschen Prinzip.

Wir beschränken uns auf periodische Zustände von der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{\nu}$ sec und setzen daher den Lichtvektor an als reellen Teil von $e^{i\nu t}\mathfrak{P}$, wo \mathfrak{P} nur noch Funktion des

1) Vgl. z. B. P. Debye, Ann. d. Phys. 30. S. 772. 1903.

Ortes ist, die überdies von z unabhängig sein soll und der Differentialgleichung

$$(1) \quad \Delta \mathfrak{P} + k^2 \mathfrak{P} = 0$$

($k = \frac{\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$) genügen muß.

Sind nun längs einer in sehr großer Entfernung vom Nullpunkt der XY -Ebene verlaufenden geschlossenen Kurve mit der äußeren Normalen n \mathfrak{P} und $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial n}$ vorgegeben, so ergibt sich für einen inneren Punkt dieser Kurve \mathfrak{P} in bekannter Weise aus dem Greenschen Satze: Wir setzen für die eine der im Greenschen Satz vorkommenden Funktionen den Lichtvektor $u = \mathfrak{P}$, für die andere Funktion v diejenige Lösung von (1), die vom Aufpunkt P nach dem Unendlichen divergierende Kreiszyklinderwellen darstellt, die zweite Hankelsche Funktion nullter Ordnung

$$v = H_0^{(2)}(kR);$$

dabei bedeutet (Fig. 1) R den Abstand des Integrationspunktes vom Aufpunkt. $H_0^{(2)}$ verhält sich¹⁾ für kleine Werte des Arguments wie

$$-\frac{2i}{\pi} \log kR, \text{ für große Werte wie}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}.$$

Das Integral über den die singuläre Stelle $R = 0$ von $H_0^{(2)}(kR)$, d. h. den Aufpunkt umschließenden Kreis mit verschwindendem Radius liefert dann $4i\mathfrak{P}$. Die Greensche Gleichung lautet also

$$(2) \quad 4i\mathfrak{P} = \int \left(\mathfrak{P} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(kR) \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Das Lichtbündel möge nun aus Richtung der $+X$ -Achse einfallen und eine Brennpunktlinie umhüllen, deren Spitze wir als Koordinatenanfangspunkt nehmen. Als Integrationskurve

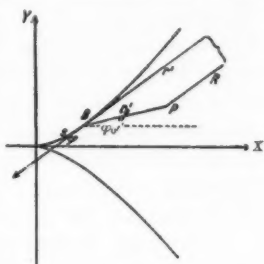


Fig. 1.

1) Vgl. N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904.

nehmen wir eine in großer Entfernung vom Nullpunkt verlaufende Linie konstanter Phase. Auf ihr sei für die Einfallswinkel φ , für die $-\alpha < \varphi < +\alpha$, das einfallende Licht gegeben durch

$$(3) \quad \mathfrak{P} = \sqrt{\frac{2}{\pi k r'}} e^{i k (r' + s) - i \frac{\pi}{4}},$$

wo (vgl. Fig. 1) r' den auf dem Lichtstrahl gemessenen Abstand des Integrationspunktes vom Schnittpunkt mit dem unendlich benachbarten Strahl, d. h. vom Berührungspunkt B mit der Brennnlinie, s die Bogenlänge der Brennnlinie von der Spitze bis zu diesem Berührungspunkt bedeutet. Für alle anderen Richtungen soll die Erregung von höherer Ordnung wie $r'^{-1/2}$ verschwinden oder aus Wellen bestehen, die von der Brennnlinie forteilten; für die letzteren ist r' als der von der Brennnlinie aus gerechnete Abstand negativ zu rechnen (vgl. Einleitung). Der Ansatz (3) ist so gewählt, daß er für den Fall des sphärisch korrigierten Bündels ($s = 0$) in den für Kreiszyylinderwellen geltenden übergeht. Die Kurven mit der Gleichung $r' + s = \text{Const}$ sind als Evoluten der Brennnlinie die Linien konstanter Phase.

Da beim Fortschreiten auf der Normalen r' der Integrationskurve die Bogenlänge s der Brennnlinie sich nicht ändert und da r' als groß vorausgesetzt ist, dürfen wir setzen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial n} &= i k \sqrt{\frac{2}{\pi k r'}} e^{i k (r' + s) - i \frac{\pi}{4}}, \\ R &= r' - r_0' \cos (\varphi_0' - \varphi), \\ \frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial n} &= -i k \sqrt{\frac{2}{\pi k r'}} e^{-i k [r' - r_0' \cos (\varphi_0' - \varphi)] + i \frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Da ferner $d\sigma = r' d\varphi$, so folgt durch Einsetzen in (2), daß sich die beiden Glieder unter dem Integralzeichen für die Wellen, die das geschlossene Gebiet verlassen, aufheben, für die einfallende Erregung dagegen addieren. So ergibt sich die in der ganzen Ebene geltende Darstellung

$$(4) \quad \pi \mathfrak{P} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{i k [r_0' \cos (\varphi_0' - \varphi) + s]} d\varphi. \quad 1)$$

1) Dieser Ausdruck ist bereits bei Debye angegeben, a. a. O., S. 775.

Sind x, y die Koordinaten des Aufpunktes P , x_0, y_0 die des Punktes B der Brennnlinie, so wird

$$r_0' \cos(\varphi_0' - \varphi) = x \cos \varphi + y \sin \varphi - (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi),$$

also

$$(4) \quad \pi \mathfrak{B} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ik[x \cos \varphi + y \sin \varphi - (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - s)]} d\varphi.$$

Werden x_0, y_0, s als Funktionen der Integrationsvariablen φ ausgedrückt, so stellt (4) die Lichtbewegung im Aufpunkt x, y dar.

Über die Gestalt der Brennnlinie oder Wellenfläche haben wir bisher keine Voraussetzung gemacht; nun befindet sich unter den Wellenflächen eines ebenen symmetrischen Bündels, das beliebig vielen zweidimensionalen Brechungen und Reflexionen unterworfen war, in dritter Näherung ein parabolischer Zylinder. Wir spezialisieren daher die folgende Untersuchung dahin, daß wir als Brennnlinie die Evolute der Parabel annehmen, deren Gleichung lautet

$$y_0^2 = \frac{8}{27p} x_0^3,$$

wobei p der Parameter der Parabel ist. Aus

$$\frac{dy_0}{dx_0} = \sqrt{\frac{2x_0}{3p}} = \operatorname{tg} \varphi$$

folgt

$$(5) \quad x_0 = \frac{3}{2} p \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad y_0 = p \operatorname{tg}^3 \varphi,$$

und hieraus

$$(5') \quad s = \frac{p}{\cos^3 \varphi} - p.$$

Daher wird

$$x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - s = -\frac{p}{2} \frac{(1 - \cos \varphi)^2}{\cos \varphi}.$$

Für kleine Einfallswinkel φ wird diese „sphärische Aberration“, wenn wir Glieder sechster und höherer Ordnung vernachlässigen, gleich $-\frac{p}{8} \varphi^4$. \mathfrak{B} unterscheidet sich daher für kleine p und kleine α nicht von dem Lichtvektor im Fall der Kreiszylinderwellen ($p = 0$). Nehmen wir z. B. $kp = 10^4$, was etwa $p = 1 \text{ mm}$ entspricht, und $\alpha = \frac{1}{20}$, so wird für die Rand-

strahlen des Bündels das von der Aberration herrührende Glied $-\frac{1}{128}$, kann also vernachlässigt werden. Die Intensitätsverteilung ist also für diesen Fall dieselbe wie die von Debye für Kreiszylinderwellen derselben Öffnung berechnete.¹⁾

§ 2. Die komplexe φ -Ebene.

Der Exponent unter dem Integralzeichen in (4') hängt ab außer von der Integrationsvariablen φ noch von dem in Wellenlängen gemessenen Parameter der Parabel $k p = 2\pi \frac{p}{\lambda}$ und von den ebenfalls in Wellenlängen gemessenen Koordinaten des Aufpunktes

$$k x = 2\pi \frac{x}{\lambda}, \quad k y = 2\pi \frac{y}{\lambda}.$$

Im folgenden werden wir nur die Abhängigkeit des Exponenten von φ zum Ausdruck bringen. Wir berechnen die Ableitungen des Exponenten, den wir mit $w(\varphi)$ bezeichnen, nach der Integrationsvariablen:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} w(\varphi) &= i k \left(x \cos \varphi + y \sin \varphi + \frac{p}{2} \frac{(1 - \cos \varphi)^2}{\cos \varphi} \right), \\ w'(\varphi) &= i k \left(-x \sin \varphi + y \cos \varphi + \frac{p}{2} \frac{\sin^3 \varphi}{\cos^3 \varphi} \right), \\ w''(\varphi) &= i k \left(-x \cos \varphi - y \sin \varphi + \frac{p}{2} \frac{\sin^3 \varphi}{\cos^3 \varphi} (2 + \cos^2 \varphi) \right) \\ &= -w(\varphi) + i k p \frac{1 - \cos^3 \varphi}{\cos^3 \varphi}, \\ w'''(\varphi) &= i k \left(x \sin \varphi - y \cos \varphi + \frac{p}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} (6 - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \right) \\ &= -w'(\varphi) + 3 i k p \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi}, \\ w^{IV}(\varphi) &= -w''(\varphi) + 3 i k p \frac{1 + 3 \sin^2 \varphi}{\cos^5 \varphi}, \\ w^V(\varphi) &= w'(\varphi) + 30 i k p \frac{\sin \varphi}{\cos^6 \varphi} (1 + \sin^2 \varphi), \\ w^{VI}(\varphi) &= w''(\varphi) + 30 i k p \frac{1 + 8 \sin^2 \varphi + 3 \sin^4 \varphi}{\cos^7 \varphi}. \end{aligned} \right.$$

Den Integrationsweg, der zunächst über die reellen Werte von φ zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ zu erstrecken ist, werden wir

1) P. Debye, a. a. O., S. 769.

in einer komplexen φ -Ebene deformieren. Wir setzen daher

$$(7) \quad \varphi = \xi + i\eta,$$

wobei ξ, η als reell vorausgesetzt sind. Mit diesem Werte von φ wird der Exponent eine komplexe Funktion

$$(8) \quad w = U + iV,$$

wobei

$$(8') \quad \begin{cases} U = k \operatorname{Sin} \eta \left[x \sin \xi - y \cos \xi - \frac{p}{2} \sin \xi \left(\frac{2}{\cos 2\xi + \operatorname{Cos} 2\eta} - 1 \right) \right], \\ V = k \operatorname{Cos} \eta \left[x \cos \xi + y \sin \xi + \frac{p}{2} \cos \xi \left(\frac{2}{\cos 2\xi + \operatorname{Cos} 2\eta} + 1 \right) \right] - kp. \end{cases}$$

Den Integrationsweg wählen wir so, daß er möglichst nur durch solche Gebiete der φ -Ebene geht, in denen

$$U = \Re(w) < 0;$$

diese Gebiete haben wir zunächst zu bestimmen.

Wir denken uns über einer φ -Ebene die zu jedem Punkt ξ, η nach (8') gehörigen Werte von U als Ordinaten aufgetragen. Zu jedem Aufpunkt, d. h. zu jedem Wertepaar x, y gehört, wenn wir uns k und p als fest denken, eine andere U -Fläche. Wir haben die Veränderungen der U -Fläche festzustellen, wenn sich der Aufpunkt ändert, z. B. die Brennnlinie überschreitet. Es genügt, das Verhalten von U zu untersuchen im Intervall

$$-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}, \quad \eta > 0;$$

wegen der Symmetrie der Brennnlinie in der XY -Ebene dürfen wir ferner $y \geq 0$ voraussetzen.

Die Kurve $U = 0$ zerfällt nach (8') in zwei Teile

$$\operatorname{Sin} \eta = 0, \quad \text{d. h. } \eta = 0,$$

$$(9) \quad \operatorname{Cos} 2\eta = \frac{p \sin \xi}{\left(x + \frac{p}{2}\right) \sin \xi - y \cos \xi} - \cos 2\xi.$$

Die Kurve (9) hat die Gerade $\xi = \xi_\infty$ zur Asymptote, wobei

$$\operatorname{tg} \xi_\infty = \frac{y}{x + \frac{p}{2}};$$

reelle Werte für η ergeben sich aus (9) nur dann, wenn die rechte Seite von (9) ≥ 1 , wenn also, wie sich durch eine einfache Umformung ergibt,

für $\left(x + \frac{p}{2}\right) \sin \xi - y \cos \xi > 0$, d. h. $\xi > \xi_\infty$:

$$\Phi = \operatorname{tg}^3 \varphi - \frac{2x}{p} \operatorname{tg} \varphi + \frac{2y}{p} \geq 0,$$

für $\left(x + \frac{p}{2}\right) \sin \xi - y \cos \xi < 0$, d. h. $\xi < \xi_\infty$: $\Phi \leq 0$,

wobei Φ eine Abkürzung für den Ausdruck dritten Grades in $\operatorname{tg} \xi$ ist. $\Phi = 0$ ergibt $\cos 2\eta = 1$, die Schnittpunkte von (9) mit der Ξ -Achse.

Die Diskriminante von Φ ist:

$$D = -\frac{108}{p^3} \left(y^3 - \frac{8}{27p} x^3 \right),$$

also bis auf einen Zahlenfaktor gerade die linke Seite der auf Null reduzierten Gleichung der Brennnlinie. Je nach dem Vorzeichen von D haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

a) $D > 0$, d. h. der Aufpunkt x, y liegt im Innern der Brennnlinie, in dem Teil der XY -Ebene, der die $+X$ -Achse enthält: die Kurve (9) schneidet die Ξ -Achse in drei reellen verschiedenen Punkten ξ_1, ξ_2, ξ_3 , und zwar ist, da $y > 0$ vorausgesetzt ist:

$$-\frac{\pi}{2} < \xi_1 < 0 < \xi_2 < \xi_3 < +\frac{\pi}{2}.$$

b) $D = 0$, d. h. der Aufpunkt liegt auf der Brennnlinie: zwei Schnittpunkte des Falles a) fallen in einen ξ_0 zusammen, und zwar offenbar die beiden positiven; aus

$$2 \operatorname{tg} \xi_0 + \operatorname{tg} \xi_1 = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}^2 \xi_0 \operatorname{tg} \xi_1 = -\frac{2y}{p}$$

folgt dann

$$\operatorname{tg} \xi_0 = \sqrt[3]{\frac{y}{p}} = \sqrt[3]{\frac{2x}{3p}}, \quad \operatorname{tg} \xi_1 = -2 \sqrt[3]{\frac{y}{p}} = -2 \sqrt[3]{\frac{2x}{3p}}.$$

c) $D < 0$, d. h. der Aufpunkt liegt im Äußern der Brennnlinie: wir erhalten nur einen reellen Schnittpunkt $\xi_1 < 0$ mit der Ξ -Achse.

Die Unterscheidung dieser Fälle können wir uns in sehr einfacher Weise veranschaulichen, wenn wir auf die Bedeutung von $\Phi = 0$ für die XY -Ebene eingehen. Ist ξ_i eine reelle Wurzel von $\Phi = 0$, so stellt in der XY -Ebene $\Phi(\xi_i) = 0$ eine Gerade dar, und zwar den Lichtstrahl unseres Bündels, der die X -Achse unter dem Winkel ξ_i schneidet. Sind nämlich

x_0, y_0 die Koordinaten des Berücksichtigungspunktes des Lichtstrahls mit der Brennnlinie, so lautet seine Gleichung:

$$y - y_0 = \operatorname{tg} \xi_i (x - x_0);$$

setzen wir für x_0, y_0 ihre Werte (5) ein, so geht diese Gleichung in der Tat über in $\Phi(\xi_i) = 0$. Halten wir nun den Aufpunkt x, y fest; so bestimmen die Wurzeln ξ_i von $\Phi = 0$ die an die Brennnlinie vom Aufpunkt aus gezogenen Tangenten, d. h. die Lichtstrahlen eines zu 180° geöffneten Bündels. Unsere Brennnlinie ist also eine Kurve dritter Klasse; von einem inneren Punkt ($D > 0$) gehen drei reelle Tangenten aus, und zwar, da $y > 0$ vorausgesetzt ist, eine negative ξ_1 und zwei positive ξ_2, ξ_3 (vgl. Fig. 2), $\Phi = 0$ hat drei reelle Wurzeln; für einen Punkt P_0 der Brennnlinie ($D = 0$) fallen ξ_2 und ξ_3 in ξ_0 zusammen, um dann komplex zu werden, wenn der Aufpunkt ins Äußere der Brennnlinie rückt ($D < 0$).

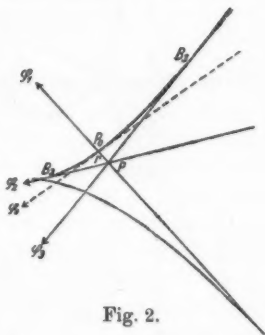


Fig. 2.

In Fig. 3a, b, c ist die Kurve $U = 0$ für je einen Punkt innerhalb, auf und außerhalb der Brennnlinie gezeichnet; wie man leicht bestätigt, ist in den schraffierten Gebieten $U < 0$. Die Änderung der komplexen Ebene, wenn der Aufpunkt die Brennnlinie überschreitet, ist aus diesen Figuren ohne weiteres ersichtlich.

Eine besondere Stellung nimmt der Punkt $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ein; nähern wir uns ihm längs der Ξ -Achse, so bleibt $U = 0$; nähern wir uns ihm aber längs einer Senkrechten zur Ξ -Achse, setzen also zuerst $\xi = \frac{\pi}{2}$ und lassen dann η von der positiven oder negativen Seite her zu Null abnehmen, so nähert sich U dem Werte $\mp \infty$. Dies entspricht der Tatsache, daß $\varphi = \frac{\pi}{2}$ eine wesentlich singuläre Stelle des Integranden ist, der in der Umgebung dieses Punktes jeden vorgegebenen Wert annimmt.

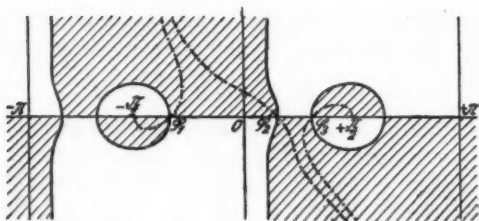


Fig. 3a.

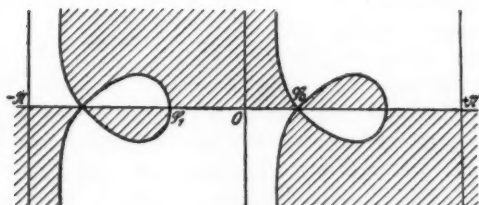


Fig. 3b.

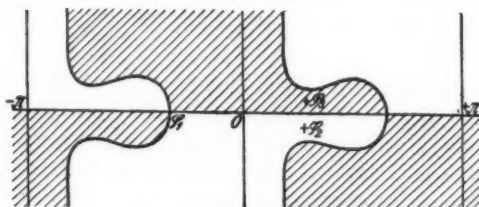


Fig. 3c.

§ 3. Bestimmung der Sattelpunkte.

Bekanntlich hat die Funktion U als reeller Teil einer komplexen Funktion nirgends ein Maximum oder Minimum von endlichem Betrage. An den Stellen nämlich, für die

$$(10) \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0,$$

ist das zweite Differential von U je nach der Fortschreitungsrichtung teils positiv, teils negativ, die U -Fläche verläuft in den vier Winkelräumen, die durch die (sich rechtwinklig schneidenden) Haupttangentialkurven bestimmt sind, abwechselnd oberhalb und unterhalb der horizontalen Tangentialebene.

Die Gleichungen (10) liefern daher Sattelpunkte. Nach den Cauchy-Riemannschen Gleichungen hat auch V an denselben Stellen Sattelpunkte.

Die beiden Gleichungen (10) für die Koordinaten ξ, η der Sattelpunkte sind identisch mit der einen Gleichung

$$\frac{dw}{d\varphi} = 0,$$

deren Wurzeln die Sattelpunkte liefern in der Form

$$\varphi = \xi + i\eta.$$

Nach (6) ist

$$\frac{dw}{d\varphi} = ik \left(-x \cos \varphi + y \sin \varphi + \frac{p}{2} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) = \frac{ikp}{2} \cos \varphi \cdot \Phi,$$

wo Φ der bereits früher (S. 362) betrachtete Ausdruck dritten Grades in $\tan \varphi$ ist, den wir bisher nur für reelle Werte $\tan \xi$ untersucht haben. Daß die reellen Wurzeln von $\Phi = 0$, die Schnittpunkte der Kurve (9) mit der Ξ -Achse, auch Sattelpunkte sind, folgt schon daraus, daß in ihnen U beim Fortschreiten sowohl längs der Ξ -Achse, als auch senkrecht zu ihr den konstanten Wert Null hat. Da nach dem vorigen Paragraphen $\Phi = 0$ die Gleichung der vom Aufpunkt x, y an die Brennnlinie gezogenen Tangenten ist, so sind in unserer φ -Ebene die komplexen durch einen Punkt außerhalb der Brennnlinie gehenden Lichtstrahlen dargestellt durch die konjugiert komplexen Sattelpunkte φ_2, φ_3 (Fig. 3c).

Zur Berechnung des Lichtvektors haben wir später Integrale über die Sattelpunkte auszuwerten, müssen also deren Koordinaten explicite kennen. Für beliebige Aufpunkte lassen sie sich aber aus $\Phi = 0$ nicht in brauchbarer Form entnehmen, da auch die reellen Wurzeln von $\Phi = 0$ in komplexer Form auftreten und sich nicht auf algebraischem Wege reell darstellen lassen (irreduzibler Fall der Gleichung dritten Grades). Das meiste Interesse beanspruchen natürlich die Beugungserscheinungen beim Übergang über die Brennnlinie. Die Lage der Sattelpunkte läßt sich nun ohne Vernachlässigung angeben, wenn wir die Brennnlinie nicht längs ihrer Normalen, sondern längs einer ihrer Tangenten überschreiten. Der Aufpunkt soll sich also etwa auf der durch φ_1 bestimmten Tangente bewegen (Fig. 2); dann ist von den drei Wurzeln von $\Phi = 0$ die eine,

$\operatorname{tg} \varphi_1$, fest, die beiden anderen lassen sich als Wurzeln einer quadratischen Gleichung leicht angeben.

Die Tangente φ_1 möge (Fig. 2) die Brennpunktlinie im Punkte $P_0(x_0, y_0)$ schneiden, wobei

$$y_0^2 = \frac{8}{27p} x_0^3.$$

Für P_0 hat die Gleichung $\Phi = 0$ außer der einfachen Wurzel $\operatorname{tg} \varphi_1$ noch die Doppelwurzel $\operatorname{tg} \varphi_0$, wobei

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \sqrt{\frac{x_0}{p}} = \sqrt{\frac{2x_0}{3p}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -2\sqrt{\frac{y_0}{p}} = -2\sqrt{\frac{2x_0}{3p}}$$

(vgl. S. 362). Liegt P auf dem durch φ_1 bestimmten Lichtstrahl, so setzen wir, um die zu ihm gehörigen Wurzeln $\operatorname{tg} \varphi_2, \operatorname{tg} \varphi_3$ von $\Phi = 0$ zu berechnen, den Abstand $P_0P = r$, positiv gerechnet in Richtung des einfallenden φ_1 ; dann ist nach Fig. 2

$$x = x_0 - r \cos \varphi_1 = \frac{3}{8} p \operatorname{tg}^2 \varphi_1 - r \cos \varphi_1,$$

$$y = y_0 - r \sin \varphi_1 = -\frac{1}{8} p \operatorname{tg}^3 \varphi_1 - r \sin \varphi_1.$$

Durch Einsetzen dieser Werte geht $\Phi = 0$ über in

$$\operatorname{tg}^3 \varphi - \left(\frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \varphi_1 - \frac{2r}{p} \cos \varphi_1 \right) \operatorname{tg} \varphi - \left(\frac{1}{4} \operatorname{tg}^3 \varphi_1 + \frac{2r}{p} \sin \varphi_1 \right) = 0,$$

eine Gleichung, die die Sattelpunkte bestimmt nicht mehr als Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten x, y des Aufpunktes, sondern der krummlinigen Koordinaten r, φ_1 bzw. φ , das wir statt φ_1 einführen werden. Da $\operatorname{tg} \varphi_1$ eine Wurzel dieser Gleichung ist, erhalten wir durch Division mit $\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_1$ die quadratische Gleichung für $\operatorname{tg} \varphi_2, \operatorname{tg} \varphi_3$:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \varphi_1 + \frac{2r}{p} \cos \varphi_1 = 0;$$

hieraus

$$(11) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi_{2,3} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi_1 \mp \sqrt{-\frac{2r}{p} \cos \varphi_1} \\ = \operatorname{tg} \varphi_0 \mp \sqrt{-\frac{2r}{p} \cos \varphi_1}. \end{cases}$$

Im folgenden benutzen wir die Abkürzung

$$(12) \quad h^2 = \frac{2|r|}{p} \cos \varphi_1,$$

unter $|r|$ den absoluten Betrag von r verstanden. Dann ist für

$$r < 0: \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi_0 - h), \quad \varphi_3 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi_0 + h), \\ r > 0: \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi_0 - i h), \quad \varphi_3 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi_0 + i h).$$

Setzen wir im zweiten Fall

$$\varphi_2 = \xi - i \eta, \quad \varphi_3 = \xi + i \eta,$$

so wird unter Benutzung der bekannten Beziehung

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \log \frac{1 - iz}{1 + iz} :$$

$$\xi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \varphi_0}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0 - h^2}, \quad \eta = \frac{1}{4} \log \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_0 + (1 + h)^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi_0 + (1 - h)^2}.$$

Wenn der Aufpunkt P von P_0 ins Unendliche rückt, also h^2 , das nach (12) mit $r = P_0 P$ proportional ist, von Null bis Unendlich wächst, so bewegen sich die komplexen Sattelpunkte φ_2, φ_3 auf einer ovalförmigen Kurve von φ_0 nach $\pi/2$, wie man nach den letzten Gleichungen leicht bestätigt.

Die Fig. 3a, b, c sind berechnet für

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad r = -\frac{p}{4}, \quad r = 0, \quad r = +\frac{p}{4}.$$

Die Linien stärksten Gefälles (Fallinien) für U , die nach Cauchy-Riemannschen Gleichungen Niveaulinien für V sind, sind in einem Punkte der φ -Ebene bestimmt durch die Fortschreitungsrichtung

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \eta} : \frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

In den Sattelpunkten ist diese Richtung nicht mehr eindeutig; mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen findet man für die reellen Sattelpunkte $\frac{d\eta}{d\xi} = \pm 1$, die Fallinien schneiden also die Ξ -Achse unter $\pm 45^\circ$. Fallen zwei Sattelpunkte zusammen, wie in Fig. 3b, so ergibt sich für die Richtung der Fallinien in diesen Punkten mit Hilfe der dritten partiellen Ableitungen von U

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \infty \quad \text{oder} \quad = \pm 1 : \sqrt{3},$$

die Neigung gegen die Ξ -Achse ist also $90^\circ, \pm 30^\circ$. Liegen die komplexen Sattelpunkte in der Nähe der Ξ -Achse, was im folgenden durchweg der Fall ist, so darf die Neigung der durch diese Punkte gehenden Fallinien gegen die Ξ - und H -Richtung als klein vorausgesetzt werden.

Es seien noch die Sattelpunkte bestimmt für zwei spezielle Fälle, für die wir die Intensitätsverteilung untersuchen werden, die Fälle $x = 0$ und $y = 0$.

a) Ist $x = 0$, d. h. liegt der Aufpunkt auf einer Senkrechten zur Achse des Bündels durch die Spitze der Brennnlinie, so lautet die Gleichung $\Phi = 0$

$$\operatorname{tg}^3 \varphi = -\frac{2y}{p} = -\varrho^3,$$

wenn zur Abkürzung $\left(\frac{2y}{p}\right)^{1/3} = \varrho$ gesetzt wird, unter der dritten Wurzel ihren reellen Wert verstanden. Die Sattelpunkte sind daher gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\varrho, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\omega \varrho, \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = -\omega^2 \varrho,$$

wo

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

die komplexen dritten Einheitswurzeln sind. Der im Gebiet $U < 0$ gelegene Sattelpunkt ist dann

$$\varphi_3 = -\arctg \omega^2 \varrho = \frac{1}{2} \arctg \frac{\varrho}{1 - \varrho^2} + \frac{i}{4} \log \frac{1 + \sqrt{3} \varrho + \varrho^2}{1 - \sqrt{3} \varrho + \varrho^2}.$$

Für kleine Werte von ϱ , für die tg durch den Bogen ersetzt werden kann, werden also die Sattelpunkte der Fig. 3c Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.

Für die Spitze der Brennnlinie ($x = 0$, $y = 0$) zerfällt die Kurve $U = 0$ in folgende Bestandteile (vgl. Fig. 4):

$$\sin \eta = 0, \quad \text{d. h. } \eta = 0,$$

$$\sin \xi = 0, \quad \text{d. h. } \xi = k\pi \quad (k \text{ positiv oder negativ ganzzahlig}),$$

$$\sin \eta = \pm \sin \xi.$$

Die letzteren Kurven sind Wellenlinien, welche die Ξ -Achse in den Punkten $\xi = k\pi$ unter $\pm 45^\circ$ schneiden.

b) Bewegt sich der Aufpunkt auf der Achse des Bündels ($y = 0$), so zerfällt $U = 0$ in

$$1. \sin \eta = 0, \quad 2. \sin \xi = 0, \quad 3. \operatorname{Cof} 2\eta = \frac{2}{1 + \frac{2x}{p}} - \cos 2\xi.$$

Die Kurve (3) hat für $0 > 1 + \frac{2x}{p}$, also für Aufpunkte, die links vom Brennpunkt F der Parabel $\left(x = -\frac{p}{2}\right)$ liegen, über-

haupt keinen reellen Punkt; bewegt sich der Aufpunkt von F gegen die Spitze der Brennpunktlinie ($-\frac{p}{2} < x < 0$), so stellt sie zwei zur Ξ -Achse symmetrische Wellenlinien dar, die aus dem

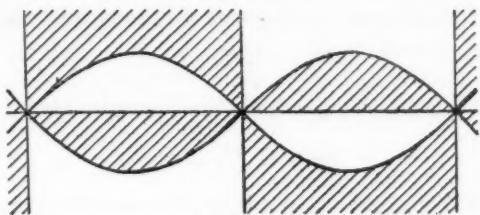


Fig. 4.

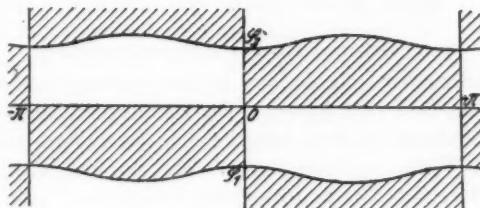


Fig. 5 a.

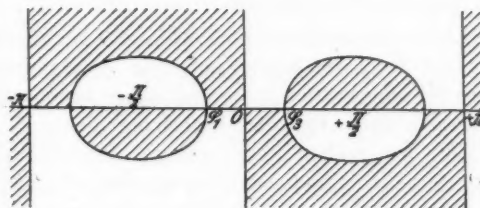


Fig. 5 b.

Unendlichen in Richtung der H -Achse gegen die Ξ -Achse zusammenrücken (Fig. 5 a, die für $x = -\frac{p}{4}$ gilt), um für $x = 0$ (Spitze der Brennpunktlinie) in die bereits behandelten Kurven $\sin \eta = \pm \sin \xi$ überzugehen (Fig. 4); ist $\frac{2x}{p} > 0$, rückt also der Aufpunkt ins Innere der Brennpunktlinie, so stellt (3) Ovale dar, die symmetrisch zur H -Achse in den Streifen $-\pi, 0$ und

0, $+\pi$ liegen (Fig. 5b, die für $x = +\frac{p}{4}$ gilt); je weiter sich der Aufpunkt nach rechts bewegt, um so enger umschließen diese Ovale die Punktepaare $\pm \frac{\pi}{2}$.

Die Gleichung zur Bestimmung der Sattelpunkte lautet jetzt

$$\operatorname{tg}^3 \varphi - \frac{2x}{p} \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Ihre eine Wurzel ist $\varphi_2 = 0$, die Gleichung der beiden anderen wird

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{2x}{p} = \sigma^2,$$

wenn wir zur Abkürzung die Wurzel aus $2x/p$ mit σ bezeichnen. Die Sattelpunkte φ_1, φ_3 sind natürlich die Schnittpunkte der Kurve (3) mit der H - bzw. Ξ -Achse.

§ 4. Deformation des Integrationsweges.

Nachdem wir uns in den beiden vorausgehenden Paragraphen ein Bild vom Aussehen der komplexen Ebene gemacht haben, ist unsere nächste Aufgabe die, den Integrationsweg in geeigneter Weise zu deformieren. Wie aus den Figg. 3, 4, 5 folgt, läßt er sich immer so ziehen, daß er nur durch Gebiete geht, in denen $U < 0$, abgesehen von den auf der reellen Achse gelegenen Sattelpunkten, in denen $U = 0$. Da $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ für das sichtbare Licht sehr groß ist (etwa 10^5 cm^{-1} für die D -Linie), wird U große negative Werte auf dem deformierten Integrationsweg einnehmen, der Integrand daher exponentiell verschwinden, abgesehen von der Umgebung der auf oder in nächster Nähe der reellen Achse gelegenen Sattelpunkte und der Punkte $\pm \alpha$, die den Randstrahlen des Bündels entsprechen. Im allgemeinen werden wir den Integrationsweg längs Falllinien für U ziehen, weil wir dann sicher sind, daß sich U , abgesehen von der Umgebung der Sattelpunkte, monoton ändert.

In dem bei unserer Wahl der Brennnlinie allerdings praktisch bedeutungslosem Fall eines zu 180° geöffneten Bündels gehen durch jeden inneren Punkt der Brennnlinie drei Strahlen, durch jeden äußeren Punkt geht ein Strahl im Sinne der geometrischen Optik. Auf der von $-\frac{\pi}{2}$ ausgehenden Falllinie, die wir als Integrationsweg wählen (Fig. 3a), ist zunächst U

negativ unendlich (vgl. § 2, letzter Absatz); sie biegt in dem unterhalb der Ξ -Achse gelegenen Teil $U < 0$ um, schneidet im Sattelpunkt φ_1 die Ξ -Achse unter 45° und zieht sich ins Unendliche des schraffierten Streifens der oberen Halbebene, wo wiederum U negativ unendlich ist; von dort gehen wir auf der Fallinie im Falle $D > 0$ über φ_2 ins Unendliche des schraffierten Streifens der unteren Halbebene und dann über φ_3 nach $+\frac{\pi}{2}$, im Falle $D < 0$ über den komplexen Sattelpunkt φ_3 nach $+\frac{\pi}{2}$.

Ist die Öffnung des Bündels $2\alpha < 180^\circ$, so wird die XY -Ebene durch die Randstrahlen $\pm\alpha$ und den Teil der Brenmlinie zwischen ihren Berührungspunkten mit den Randstrahlen in eine Anzahl von Gebieten zerlegt, die in Fig. 6 mit 0, I, II, III bezeichnet sind. Diese Bezeichnung ist so gewählt, weil durch jeden Punkt dieser Gebiete bzw. 0, 1, 2, 3 Strahlen des Bündels gehen. Den Integrationsweg ziehen wir in der φ -Ebene längs der von $\pm\alpha$ ausgehenden Fallinien, die die Ξ -Achse rechtwinklig schneiden, ins Unendliche oder nach $\pm\frac{\pi}{2}$, je nachdem außerhalb der

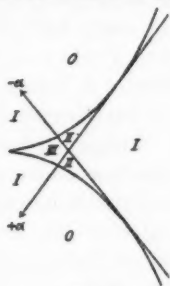


Fig. 6.

Strecke $-\alpha \dots +\alpha$ noch reelle Sattelpunkte liegen oder nicht. Nehmen wir als Beispiel den Fall, für den wir im nächsten Paragraphen die Intensität berechnen werden: $\varphi_0 = 45^\circ$, der Aufpunkt P möge, auf dem Strahl φ_1 vom Gebiete II in das Gebiet 0 rückend, die Brenmlinie überschreiten; die Öffnung des Bündels betrage $2\alpha = 120^\circ$. Da

$$\varphi_1 = -\arctg 2 < -\frac{\pi}{3},$$

gehört der Strahl φ_1 dem Bündel nicht mehr an. Das Integral ist also zu erstrecken längs der von $-\frac{\pi}{3}$ ausgehenden Fallinie ins Unendliche des schraffierten Streifens der oberen Halbebene, von da über die reellen Sattelpunkte φ_2, φ_3 bzw. über den komplexen Sattelpunkt φ_3 , je nachdem P im Innern oder Äußern der Brenmlinie liegt, nach $+\frac{\pi}{2}$, und von da

schließlich auf der Fallinie nach $+\frac{\pi}{3}$. Zur Berechnung des Lichtvektors haben wir also auszuwerten die Integrale über die beiden reellen oder über den komplexen Sattelpunkt, sowie die von den Randstrahlen $\pm \alpha$ herrührenden Integrale.

Wäre der Lichtvektor beim Übergang über die Brennnlinie etwa von III nach I zu berechnen, so gehörte der Strahl q_1 dem Bündel an, wir hätten zu den Integralen des eben behandelten Falles noch das Integral über den Sattelpunkt q_1 zu addieren.

Bewegt sich der Aufpunkt über die geradlinige Begrenzung des Bündels, etwa über $+\alpha$ von I nach 0, so ist die Änderung der q -Ebene ersichtlich die, daß ein Sattelpunkt, q_2 , der für Aufpunkte des Gebietes I noch links von $+\alpha$ liegt, über den festen Punkt $+\alpha$ hinweg nach rechts rückt. Für Punkte des Gebietes 0 liefern daher nur die von den Randstrahlen $+\alpha$, $-\alpha$ herrührenden Integrale Beiträge zum Lichtvektor.

Zusammenfassend können wir sagen: Übergang über die Brennnlinie bedeutet für die komplexe Ebene, daß zwei reelle Sattelpunkte zusammenfallen und dann komplex werden, Übergang über die geradlinige Begrenzung des Bündels bedeutet, daß ein Sattelpunkt für die Berechnung des Lichtvektors verloren geht.

§ 5. Die Intensitätsverteilung beim Übergang über die Brennnlinie.

In diesem und im folgenden Paragraphen führen wir die Integrale über die Sattelpunkte aus für den im vorigen Paragraphen erwähnten Fall, daß der Aufpunkt, auf dem Strahl q_1 vom Gebiet II ins Gebiet 0 rückend, die Brennnlinie überschreitet (Fig. 6). Je nachdem der Aufpunkt P im Innern oder Äußern der Brennnlinie liegt, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden: $P_0 P = r < 0$ und $r > 0$; im ersten Fall haben wir über die reellen Sattelpunkte q_2, q_3 , im zweiten Fall über den komplexen Sattelpunkt q_s zu integrieren.

Fall A: $r < 0$.

Zunächst werten wir das Integral über den Sattelpunkt q_1 aus; bezeichnen wir die in Richtung des Integrationsweges,

den wir in der Nähe von φ_3 als geradlinig betrachten dürfen, von φ_3 ausgemessene Entfernung mit δ , so wird nach Fig. 3a

$$\varphi = \varphi_3 + e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \delta, \quad d\varphi = e^{i\frac{\pi}{4}} d\delta.$$

Setzen wir diesen Wert in $w(\varphi)$ (S. 360) ein, berücksichtigen, daß $w'(\varphi_3) = 0$ und schreiben zur Abkürzung $w(\varphi_3) = w_3$, $w''(\varphi_3) = w_3''$ usw., so folgt

$$(19) \quad w(\varphi) = w_3 + \frac{w_3''}{2!} e^{i\frac{\pi}{2}} \delta^2 + \frac{w_3'''}{3!} e^{i\frac{3\pi}{4}} \delta^3 + \frac{w_3^{IV}}{4!} e^{i\pi} \delta^4 + \dots$$

In w_3 und seine Ableitungen haben wir die rechtwinkligen Koordinaten x, y durch die krummlinigen

$$r, \varphi_1 \quad \text{bzw.} \quad h = \sqrt{\frac{2|r|}{p}} \cos \varphi_1, \varphi_0$$

zu ersetzen; es ist ja (vgl. S. 366)

$$x = \frac{3}{8} p \operatorname{tg}^2 \varphi_1 - r \cos \varphi_1 = \frac{3}{2} p \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + \frac{1}{2} p h^2,$$

$$y = -\frac{1}{8} p \operatorname{tg}^3 \varphi_1 - r \sin \varphi_1 = p \operatorname{tg}^3 \varphi_0 - p h^2 \operatorname{tg} \varphi_0;$$

da nach (11)

$$\cos \varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_3}} = \frac{\cos \varphi_0}{\sqrt{N}},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$N = 1 + 2h \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + h^2 \cos^2 \varphi_0,$$

so wird

$$(14) \quad \begin{cases} w_3 = ikp \frac{\sqrt{N}}{\cos^3 \varphi_0} (1 - h \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) - ikp, \\ w_3'' = ikp \frac{\sqrt{N}}{\cos \varphi_0} (3h \operatorname{tg} \varphi_0 + h^2), \\ w_3''' = ikp \frac{3\sqrt{N}}{\cos^3 \varphi_0} [\operatorname{tg} \varphi_0 + h(1 + 2\sin^2 \varphi_0) \\ \quad + 3h^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + h^3 \cos^2 \varphi_0], \\ w_3^{IV} = ikp \frac{\sqrt{N}}{\cos^3 \varphi_0} [3 + 12\operatorname{tg}^2 \varphi_0 + 3h \operatorname{tg} \varphi_0 (9 + 7\sin^2 \varphi_0) \\ \quad + 2h^2 (7 + 29\sin^2 \varphi_0) + 48h^3 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 12h^4 \cos^2 \varphi_0]. \end{cases}$$

w_3'' verschwindet für $h = 0$; für einen Punkt der Brennnlinie fallen ja zwei Sattelpunkte zusammen, $w' = 0$ hat also eine Doppelwurzel. Wenn wir die Entwicklung (13) von w nach

Potenzen von δ mit dem quadratischen Glied abbrechen, so setzen wir also damit voraus, daß w_3'' nicht zu klein ist, d. h. daß der Aufpunkt nicht zu nahe der Brennnlinie liegt. Nehmen wir beispielsweise wieder $kp = 10^4$, ferner $\varphi_0 = 45^\circ$, so wird

$$(14') \begin{cases} w_3 = i \cdot 10^4 \cdot 2\sqrt{2} \sqrt{1 + h + \frac{1}{2}h^2} (1 - \frac{1}{2}h) - i \cdot 10^4 \\ w_3'' = i \cdot 10^4 \sqrt{2} \sqrt{1 + h + \frac{1}{2}h^2} (3h + h^2) \\ w_3''' = i \cdot 10^4 6\sqrt{2} \sqrt{1 + h + \frac{1}{2}h^2} (1 + 2h + \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^3). \end{cases}$$

Wie in der Dissertation begründet, dürfen wir uns dann für Werte von $h \geq \frac{1}{10}$, also $|r| \geq 0,011$ mm auf das quadratische Glied in der Entwicklung von w beschränken.

Im Integral über den Sattelpunkt φ_3 , das wir mit J_3 bezeichnen, brauchen wir nur bis zu solchen Werten von δ zu integrieren, für die $e^{-\frac{w_3''}{2i}\delta^2}$ praktisch Null wird, also etwa bis $\frac{w_3''}{2i}\delta^2 = 5$; dann dürfen wir aber als Integrationsgrenzen $\pm\infty$ annehmen. So ergibt sich schließlich

$$J_3 = e^{w_3 + i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{w_3''}{2i}\delta^2} d\delta.$$

Führen wir als neue Integrationsvariable ein

$$u = \sqrt{\frac{w_3''}{2i}} \cdot \delta, \quad d\delta = \sqrt{\frac{2i}{w_3''}} du,$$

so wird

$$(15) \quad J_3 = \sqrt{\frac{2i}{w_3''}} e^{w_3 + i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{2i\pi}{w_3''}} e^{w_3 + i\frac{\pi}{4}},$$

da bekanntlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Für w_3 und w_3'' hat man ihre Werte aus (14) bzw. (14') einzusetzen.

In ähnlicher Weise ergibt sich das Integral J_2 über den Sattelpunkt φ_2 . Die Werte für w_2 , w_2'' folgen aus denen für w_3 , w_3'' , wenn man h durch $-h$ ersetzt. Als Integrationsvariable haben wir einzuführen

$$\varphi = \varphi_2 + e^{-i\frac{\pi}{4}}\delta, \quad d\varphi = e^{-i\frac{\pi}{4}}d\delta,$$

wo δ wieder in Richtung des Integrationsweges positiv gemessen ist. Wir erhalten

$$(15') \quad J_2 = e^{w_2 - i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{w_2''}{2i}\delta^2} d\delta = \sqrt{-\frac{2i\pi}{w_2''}} e^{w_2 - i\frac{\pi}{4}},$$

da jetzt

$$\frac{w_2''}{i} < 0, \quad \text{also} \quad u = \sqrt{-\frac{w_2''}{2i}}\delta$$

zu setzen ist.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß $-\frac{w_2''}{ik}$ den Abstand $|PB_2|$ (Fig. 2) des Punktes P vom Berührungspunkt des Strahls φ_2 , also die in (3) mit r' bezeichnete Größe, und $\frac{w_2}{ik}$, das nach (6) und (5')

$$= -\frac{w_2''}{ik} + s = |PB_2| + \text{arc } OB_2,$$

die in (3) mit $r' + s$ bezeichnete Größe bedeutet; ebenso ist

$$\frac{w_2''}{ik} = |B_2P|, \quad \frac{w_2}{ik} = -|B_2P| + \text{arc } OB_2;$$

die Phase von J_2 unterscheidet sich von der des Ausdrucks (3) um $\pi/2$. Für einen Aufpunkt des Gebietes I, in dem die Strahlen einfallen, gehört der Strahl φ_2 dem Bündel nicht mehr an, von Integralen über Sattelpunkte kommt für den Lichtvektor nur J_2 in Betracht. $\mathfrak{P} = \frac{1}{\pi}J_2$ ist daher identisch mit dem nach der geometrischen Optik geltenden Ausdruck (3). Da, wie in § 9 gezeigt wird, die von den Punkten $\pm\alpha$ ausgehenden Integrale von höherer Ordnung verschwinden, so ist damit gezeigt, daß der aus dem Huygensschen Prinzip abgeleitete Ausdruck (4') die Randbedingungen erfüllt, wenn wir von den beim Übergang über die Randstrahlen auftretenden Beugungserscheinungen absehen; daß er der optischen Differentialgleichung genügt, ist unmittelbar ersichtlich.

Da $\pi \cdot \mathfrak{P}$ gleich der Summe der Integrale über die Sattelpunkte ist, so haben wir damit bestätigt, was bereits in der Einleitung vorweggenommen wurde, daß man zur Berechnung

der Lichtbewegung die geometrischen Strahlen zur Interferenz zu bringen hat.

Für Aufpunkte des Gebietes II (Fig. 6), die nicht zu nahe der geometrischen Begrenzung des Bündels liegen, ist also die Lichtbewegung nach (15) und (15')

$$\mathfrak{P} = \sqrt{\frac{2i}{\pi w_3''}} e^{w_3 + i \frac{\pi}{4}} + \sqrt{-\frac{2i}{\pi w_3''}} e^{-w_3 - i \frac{\pi}{4}}.$$

Die Intensität als Quadrat des absoluten Betrags von \mathfrak{P} erhalten wir am einfachsten durch Multiplikation von \mathfrak{P} mit seinem konjugiert komplexen Wert

$$(16) \quad \bar{\mathfrak{P}} = \sqrt{\frac{2i}{\pi w_3''}} e^{-w_3 - i \frac{\pi}{4}} + \sqrt{-\frac{2i}{\pi w_3''}} e^{-w_3 + i \frac{\pi}{4}};$$

so ergibt sich

$$\frac{\pi}{2} |\mathfrak{P}|^2 = -\frac{i}{w_3''} + \frac{i}{w_3''} + 2 \sqrt{-\frac{i}{w_3''} \cdot \frac{i}{w_3''}} \sin\left(\frac{w_3}{i} - \frac{w_3}{i}\right).$$

Für w_3, w_3'' haben wir ihre Werte (14) einzusetzen; ersetzen wir h durch $-h$, so ergeben sich w_3, w_3'' . Die weitere Rechnung spezialisieren wir für $\varphi_0 = 45^\circ$ und kleine Werte von h . Entwickelt man $|\mathfrak{P}|^2$ nach Potenzen von h , so folgt

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} k p \cdot |\mathfrak{P}|^2 &= \frac{1}{h} \cdot \left\{ 1 + \frac{29}{72} h^2 - \frac{805}{10368} h^4 - \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{18} h^2 - \frac{25}{432} h^4 - \dots \right) \right. \\ &\quad \left. \sin \frac{k p}{\sqrt{2}} h^3 \left(1 + \frac{1}{8} h^2 - \frac{5}{128} h^4 - \frac{11}{1024} h^6 + \dots \right) \right\}. \end{aligned}$$

Schließlich setzen wir noch $k p = 10^4$ und führen an Stelle von h eine neue dem Abstand r proportionale Variable n ein:

$$h^2 = \frac{2r}{p} \cos \varphi_1 = \frac{n}{10^3}, \quad \text{also} \quad \frac{r}{\lambda} = \frac{5\sqrt{5}}{2\pi} \cdot n = 1,779 \cdot n;$$

Dann wird

$$(16') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \cdot 10^4 |\mathfrak{P}|^2 &= 10 \sqrt{\frac{10}{n}} \\ &\cdot \left\{ 1 + 0,000\,402\,8\,n - 0,000\,000\,076\,7\,n^2 - \dots \right. \\ &\quad \left. + (1 + 0,000\,055\,6\,n - 0,000\,000\,057\,9\,n^2 - \dots) \right. \\ &\quad \left. \sin \frac{n\sqrt{n}}{2\sqrt{5}} (1 + 0,000\,125\,n - 0,000\,000\,039\,n^2 - \dots) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist

$$h \geq \frac{1}{10}, \text{ also } n \geq 10 \text{ oder } \frac{r}{\lambda} \geq 17,8$$

vorausgesetzt. Nach (16') wurde $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \cdot 10^4 |\mathfrak{B}|^2$ berechnet von $n = 10$ bis $n = 27$ in Intervallen von 0,5, also etwa von $\frac{r}{\lambda} = 18$ bis $\frac{r}{\lambda} = 48$, und in Fig. 7 zur Abszisse $\frac{r}{\lambda}$ aufgetragen. Wegen

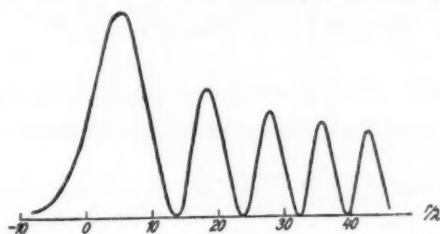


Fig. 7.

des sin-Gliedes treten Schwankungen der Intensität auf: Minima erhalten wir angenähert, wenn der sin den Wert -1 hat; die ersten Minima weichen unmerklich von Null ab, wie aus (16') ersichtlich, die Maxima, für die der sin nahezu den Wert $+1$ hat, nehmen wegen des Faktors $n^{-1/2}$ ab.

Fall B: $r > 0$.

Der Aufpunkt liegt jetzt, wenn wir wiederum den Übergang von II nach 0 ins Auge fassen (Fig. 6) im Gebiete des geometrischen Schattens. Wir haben nach Fig. 3c nur über den komplexen Sattelpunkt φ_s zu integrieren. Die Werte von w_s und w_s'' ergeben sich aus (14), wenn wir h ersetzen durch ih ; führen wir gleich $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} w_s &= ikp 2\sqrt{2} \left(1 - \frac{i}{2} h\right) \sqrt{1 + ih - \frac{1}{2} h^2 - ikp} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} kp h^3 \left(1 - \frac{1}{8} h^2 + \dots\right) \\ &\quad + ikp 2\sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{8} h^2 + \frac{7}{128} h^4 - \dots\right) - ikp, \end{aligned}$$

$$w_s'' = -kp\sqrt{2} (3h + ih^2) \sqrt{1 + ih - \frac{1}{2} h^2}.$$

Wir integrieren längs einer Parallelen zur Ξ -Achse, setzen also $\varphi = \varphi_3 + \delta$, $d\varphi = d\delta$.

Brechen wir, wie im Fall A, die Entwicklung von $w(\varphi)$ mit dem quadratischen Glied ab, schließen also die nächste Nähe der Brennnlinie aus, so wird

$$w = w_3 + \frac{w_3''}{2} \delta^2,$$

$$J_3 = e^{w_3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{w_3''}{2} \delta^2} d\delta = \sqrt{-\frac{2\pi}{w_3''}} e^{w_3}.$$

Die Intensität erhalten wir wieder durch Multiplikation von $\mathfrak{P} = \frac{1}{\pi} J_3$ mit seinem konjugiert komplexen Wert:

$$\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} k p |\mathfrak{P}|^2 = \frac{1}{2h} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} k p h^3 \left(1 - \frac{1}{8} h^2 + \dots\right)} \left(1 - \frac{17}{144} h^2 + \dots\right). \quad (17)$$

Für $h = \frac{1}{10}$ ergibt sich $5 \cdot e^{-7} = 0,0046$, also praktisch Null.

§ 6. Fortsetzung;

Intensitätsverteilung in nächster Nähe der Brennnlinie.

Aufgabe dieses Paragraphen ist es, den Intensitätsverlauf bis zu einer Entfernung von etwa 18λ ($h = \frac{1}{10}$) beiderseits der Brennnlinie zu berechnen. Der Unterschied in der rechnerischen Behandlung gegenüber dem vorigen Paragraphen liegt darin, daß wir in der Entwicklung (13) des Exponenten von e unter dem Integralzeichen das Glied dritter Ordnung berücksichtigen müssen und so auf Airysche Integrale kommen. Das Glied dritter Ordnung wird nach (14) selbst wieder klein, wenn φ_0 klein ist; in diesem Fall wäre erst das Glied mit δ^4 ausschlaggebend. Den Fall $\varphi_0 = 0$ (Achse des Bündels) behandeln wir im übernächsten Paragraphen.

Wir unterscheiden wieder die beiden Fälle $r \leq 0$.

Fall A: $r < 0$.

Zur Berechnung des Integrals J_3 über den Sattelpunkt φ_3 setzen wir zur Abkürzung den Exponenten (vgl. 13)

$$w = w_3 + e^{i\frac{3\pi}{4}} \frac{w_3'''}{6} \delta^3 + e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{w_3'''}{2} \delta^2 = w_3 + i(A\delta^3 + B\delta^2),$$

$$A = e^{i \frac{3\pi}{4}} \frac{w_3'''}{6i}, \quad B = e^{i \frac{\pi}{2}} \frac{w_3''}{2i}.$$

Um die Normalform des Airyschen Integrals herzustellen, führen wir zunächst eine neue Integrationsvariable ε ein:

$$\delta = \varepsilon - \frac{B}{3A};$$

damit fällt das Glied mit ε^2 fort und es wird

$$w - w_3 = i \left(A \varepsilon^3 - \frac{B^2}{3A} \varepsilon \right) + i \frac{2B^3}{27A^3};$$

setzen wir dies

$$= i \frac{\pi}{2} (\eta^3 - m_3 \eta) + i \frac{2B^3}{27A^3},$$

so wird die endgültige Integrationsvariable

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \left(\frac{2A}{\pi} \right)^{1/3} \cdot \varepsilon = e^{i \frac{\pi}{4}} \left(\frac{w_3'''}{3\pi i} \right)^{1/3} \cdot \left(\delta + e^{-i \frac{\pi}{4}} \frac{w_3''}{w_3'''} \right); \\ \text{daher} \\ d\delta = e^{-i \frac{\pi}{4}} \left(\frac{3\pi i}{w_3'''} \right)^{1/3} d\eta. \end{array} \right.$$

Der Parameter m_3 des Airyschen Integrals wird reell:

$$(18) \quad m_3 = \left(\frac{3}{\pi^3} \right)^{1/3} \left(\frac{w_3''}{i} \right)^2 \cdot \left(\frac{w_3'''}{i} \right)^{-4/3}.$$

Also obere Integrationsgrenze darf wieder in $J_3 + \infty$, ebenso als untere Grenze in $J_2 - \infty$ angenommen werden. Da die Sattelpunkte φ_2 und φ_3 um so näher beieinander liegen, je näher der Aufpunkt an der Brennnlinie liegt, je kleiner also h ist, verlängern wir in Fig. 3a die als geradlinig angenommenen Integrationswege über φ_2 und φ_3 bis zu ihrem Schnittpunkt und nehmen als untere Integrationsgrenze in J_3 und als obere in J_2 die Kathete eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $\varphi_3 - \varphi_2$, also

$$\mp \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\sqrt{2}}.$$

Wir erhalten zunächst

$$\operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{2h \cos^2 \varphi_3}{1 - h^2 \cos^2 \varphi_3},$$

wenn wir für φ_3 und φ_2 ihre Werte (11) einsetzen. Die untere Grenze von J_3 wird also, wenn wir die Glieder dritter und höherer Ordnung in h vernachlässigen,

$$-\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{2h \cos^2 \varphi_0}{1 - h^2 \cos^2 \varphi_0} = -h \sqrt{2} \cos^2 \varphi_0.$$

Entwickeln wir auch die Ausdrücke (14) für w_3 und seine Ableiteten nach Potenzen von h , das ja $\leq \frac{1}{10}$ vorausgesetzt ist, so ergibt sich nach (18)

$$(19) \quad \begin{cases} m_3 = 3 \left(\frac{kp}{\pi} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \right)^{3/4} h^2 \\ \quad \cdot \left\{ 1 - \frac{2}{3} h \operatorname{ctg} \varphi_0 (1 + 3 \sin^2 \varphi_0) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{9} h^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi_0 (7 + 3 \sin^2 \varphi_0 + 36 \sin^4 \varphi_0) + \dots \right\}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den vor das Integralzeichen tretenden Phasenfaktor zur Abkürzung mit e^{a_3} , so wird

$$(20) \quad \begin{cases} a_3 = w_3 + i \frac{2B^2}{27A^3} = w_3 + \frac{i}{3} \left(\frac{w_3''}{i} \right)^3 \left(\frac{w_3'''}{i} \right)^{-2} \\ \quad = \frac{ikp}{\cos^3 \varphi_0} \cdot \left\{ 1 - \cos^3 \varphi_0 + \frac{1}{2} h^2 \cos^2 \varphi_0 (1 - 3 \sin^2 \varphi_0) \right. \\ \quad \quad \left. - \frac{3}{8} h^4 \cos^6 \varphi_0 (3 + 5 \sin^2 \varphi_0) \right. \\ \quad \quad \left. + \frac{2}{3} h^5 \frac{\cos^7 \varphi_0}{\sin \varphi_0} (2 + 3 \sin^2 \varphi_0 + 9 \sin^4 \varphi_0) + \dots \right\}. \end{cases}$$

Die untere Integrationsgrenze von J_3 wird für die Integrationsvariable η , entsprechend

$$\delta = -h \sqrt{2} \cos^2 \varphi_0,$$

nach (17)

$$(21) \quad \begin{cases} -i\beta = -i \left(\frac{kp}{\pi} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \right)^{1/4} \\ \quad \cdot h \left(1 + \frac{1-2i}{3} h \operatorname{ctg} \varphi_0 (1 + 3 \sin^2 \varphi_0) \right), \end{cases}$$

die obere Integrationsgrenze, entsprechend $\delta = \infty$

$$e^{i \frac{\pi}{4}} \cdot \infty.$$

In dem Ausdruck für β vernachlässigen wir noch das zweite Glied in der Klammer, setzen also

$$(21') \quad \beta = \left(\frac{kp}{\pi} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \right)^{1/4} \cdot h,$$

so daß die untere Grenze rein imaginär wird.

Wir deformieren nun den Integrationsweg in einer η -Ebene in die in Fig. 8 mit (1), (2), (3) bezeichneten Bestandteile. Längs der Strecke (1) führen wir durch die Beziehung

$\eta = -i \eta'$ eine neue Integrationsvariable η' ein, die wir hinterher wieder mit η bezeichnen. Berücksichtigen wir, daß in erster Näherung

$$m_3 = 3 \beta^2,$$

so wird

$$\int_{-i\beta}^0 e^{i \frac{\pi}{2} (\eta^2 - m_3 \eta)} d\eta = i \int_0^{\sqrt{m_3/3}} e^{-\frac{\pi}{2} (\eta^2 + m_3 \eta)} d\eta;$$

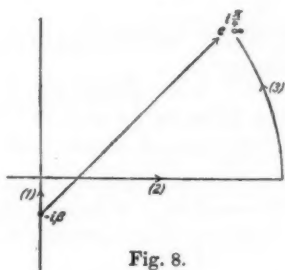


Fig. 8.

in der Dissertation ist nachgewiesen, daß das links stehende Integral mit dem Werte (21) für $-i\beta$ mit hinreichender Genauigkeit mit dem rechts stehenden übereinstimmt. Das über (2) erstreckte Integral ist das gewöhnliche Airysche Integral mit den Grenzen 0 und ∞ . Auf dem in großer Entfernung liegenden Bogen (3) hat der Exponent einen großen negativen reellen Teil, das Integral verschwindet daher längs (3).

Da nach (17) noch

$$d\delta = e^{-i \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi \cos^4 \varphi_0}{k p \sin \varphi_0} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{3} h \operatorname{ctg} \varphi_0 (1 + 3 \sin^2 \varphi_0) \right) d\eta,$$

so wird schließlich

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} J_3 &= \left(\frac{\pi \cos^4 \varphi_0}{k p \sin \varphi_0} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{3} h \operatorname{ctg} \varphi_0 (1 + 3 \sin^2 \varphi_0) \right) \\ &\quad e^{i\alpha_3} \left(\int_0^{\infty} e^{i \frac{\pi}{2} (\eta^2 - m_3 \eta)} d\eta + i \int_0^{\sqrt{m_3/3}} e^{-\frac{\pi}{2} (\eta^2 + m_3 \eta)} d\eta \right). \end{aligned} \right.$$

Dabei haben m_3 und α_3 die in (19) und (20) angegebenen Werte.

In ähnlicher Weise hat man das Integral J_2 , über den Sattelpunkt φ_2 auszuwerten. Den Parameter m_2 des Airyschen Integrals und den Phasenfaktor e^{a_2} erhält man, wenn man in m_3 und $e^{a_3} h$ ersetzt durch $-h$. Dann wird

$$(22') \quad \left\{ \begin{aligned} J_2 &= \left(\frac{\pi}{kp} \frac{\cos^4 \varphi_0}{\sin \varphi_0} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{3} h \operatorname{ctg} \varphi_0 (1 + 3 \sin^2 \varphi_0) \right) \\ e^{a_2} &\left(\int_0^\infty e^{-i \frac{\pi}{2} (\eta^3 - m_2 \eta)} d\eta - i \int_0^{V_{m_2/3}} e^{-\frac{\pi}{2} (\eta^3 + m_2 \eta)} d\eta \right). \end{aligned} \right.$$

Für die in J_2 und J_3 auftretenden Integrale wählen wir folgende Bezeichnungen:

$$C(m) + i S(m) = \int_0^\infty e^{i \frac{\pi}{2} (\eta^3 - m \eta)} d\eta,$$

also

$$C(m) = \int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} (\eta^3 - m \eta) d\eta, \quad S(m) = \int_0^\infty \sin \frac{\pi}{2} (\eta^3 - m \eta) d\eta,$$

$$E(m) = \int_0^{V_{m/3}} e^{-\frac{\pi}{2} (\eta^3 + m \eta)} d\eta;$$

je nachdem das Argument m_2 oder m_3 ist, schreiben wir C_2 statt $C(m_2)$, S_3 statt $S(m_3)$ usw.

Für den Lichtvektor ergibt sich nach (22) und (22'):

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi \mathfrak{P} &= J_3 + J_2 = \left(\frac{\pi}{kp} \frac{\cos^4 \varphi_0}{\sin \varphi_0} \right)^{1/2} \\ &\cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} h \operatorname{ctg} \varphi_0 (1 + 3 \sin^2 \varphi_0) \right) e^{a_1} [C_3 + i(S_3 + E_3)] \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{3} h \operatorname{ctg} \varphi_0 (1 + 3 \sin^2 \varphi_0) \right) e^{a_2} [C_2 - i(S_2 + E_2)] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Durch Multiplikation von \mathfrak{P} mit seinem konjugiert komplexen Wert \mathfrak{P} finden wir die Intensität; vernachlässigen wir das Quadrat von $\frac{1}{3} h \operatorname{ctg} \varphi_0 (1 + 3 \sin^2 \varphi_0)$ gegen 1, so folgt

$$(23') \quad \left\{ \begin{aligned} \pi^2 |\mathfrak{P}|^2 &= \left(\frac{\pi}{kp} \frac{\cos^4 \varphi_0}{\sin \varphi_0} \right)^{1/2} \cdot \left\{ (C_3 + C_2)^2 + (S_3 + E_3 - S_2 - E_2)^2 \right. \\ &\quad - \frac{2}{3} h \operatorname{ctg} \varphi_0 (1 + 3 \sin^2 \varphi_0) \\ &\quad \quad \quad [C_3^2 - C_2^2 + (S_3 + E_3)^2 - (S_2 + E_2)^2] \\ &\quad \quad \quad \left. - 2[C_2(S_3 + E_3) + C_3(S_2 + E_2)] \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{i} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4}$ darf durch das erste Glied seiner Entwicklung ersetzt werden (vgl. 20):

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4} = \frac{4}{3} k p h^5 \frac{\cos^4 \varphi_0}{\sin \varphi_0} (2 + 3 \sin^2 \varphi_0 + 9 \sin^4 \varphi_0);$$

$\cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4}$ ist in (23') durch 1 ersetzt. (23') gibt die Intensitätsverteilung für innere Punkte in nächster Nähe der Brennpunktlinie.

Die Funktion

$$C(m) = \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} (\eta^3 - m \eta) d\eta$$

ist von Airy, l. c., berechnet. Für $S(m)$ und $E(m)$ sind in der Dissertation konvergente und halbkonvergente Reihen entwickelt und die nach diesen berechneten Tabellen angegeben.

Mittels dieser Tabellen wurde aus (23') $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} 10^4 |\mathfrak{P}|^2$ (vgl. 16)

für Werte von h zwischen 0 und $\frac{1}{10}$ berechnet und die Intensitätskurve 7 für dieses Intervall vervollständigt. Für $h = \frac{1}{10}$ liefern (16) und (23') Werte, die um 5–6 Proz. voneinander abweichen.

Wir bemerken noch, daß (23) seiner Ableitung nach auch für größere Werte von h gültig bleibt, wenn man nur an Stelle von $m_1, m_2, d\delta$ ihre Werte (18) und (17) und nicht die ersten Glieder ihrer Entwicklung nach h setzt. In der Tat geht (23) in (16) über, wenn man für C, S, E ihre asymptotischen Werte nimmt. Aus demselben Grunde stimmen bei Mascart und Möbius die hellen und dunklen Streifen des Regenbogens überein, wie sie einerseits durch Integration, andererseits durch Interferenz der geometrischen Strahlen berechnet werden; der Wert für die Intensität bei Mascart, S. 400, ist bis auf einen konstanten Faktor der asymptotische Ausdruck für das Quadrat des Airyschen Integrals.

Fall B: $r > 0$.

Den Integrationsweg wählen wir wie in § 5 durch φ_3 parallel zur Ξ -Achse. Um w_3 und seine Ableitungen zu erhalten, haben wir in (14) h durch ih zu ersetzen. Durch die Substitution

$$\eta = \left(\frac{w_3'''}{3\pi i} \right)^{1/2} \cdot \left(\delta + \frac{w_3''}{w_3'''} \right)$$

stellen wir wie im Fall A wieder die Normalform des Airyschen Integrals her, dessen Parameter

$$m = -3 \left(\frac{kp}{\pi} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \right)^{2/3} h^2 \left(1 + \frac{2}{3} i h \operatorname{ctg} \varphi_0 (1 + 3 \sin^2 \varphi_0) \right)$$

wird; um nicht zu komplizierte Ausdrücke (komplexes Argument des Airyschen Integrals) zu erhalten, berücksichtigen wir nur das erste Glied von m und erhalten so einen etwas rascheren Abfall der Intensität als bei der genauen Rechnung. Die Integrationsgrenzen für δ , also auch für η sind $\mp \infty$, also wird

$$J_3 = \left(\frac{\pi}{kp} \frac{\cos^4 \varphi_0}{\sin \varphi_0} \right)^{1/2} e^a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{\pi}{2} (\eta^2 - m \eta)} d\eta = 2 \left(\frac{\pi}{kp} \frac{\cos^4 \varphi_0}{\sin \varphi_0} \right)^{1/2} e^a C(m);$$

$1 - \frac{i}{3} h \operatorname{ctg} \varphi_0 (1 + 3 \sin^2 \varphi_0)$ ist dabei durch 1 ersetzt. Die Intensität wird

$$(24) \quad \pi^2 |\mathfrak{P}|^2 = 4 \left(\frac{\pi}{kp} \frac{\cos^4 \varphi_0}{\sin \varphi_0} \right)^{1/2} C(m)^2,$$

wenn noch e^{2a} mit

$$a = -\frac{2}{3} kp h^3 \frac{\cos^4 \varphi_0}{\sin \varphi_0} (2 + 3 \sin^2 \varphi_0 + 9 \sin^4 \varphi_0)$$

gleich 1 gesetzt wird. Nach (24) ist die Intensitätskurve (7) für das Gebiet des geometrischen Schattens ergänzt.

Für $\varphi_0 = 45^\circ$ ergibt sich so in nächster Nähe der Brennpunktlinie im beleuchteten Teil ein Anstieg der Intensität bis zu dem hohen breiten Maximum bei $r = 6\lambda$, entsprechend einem Verhalten des Lichtvektors wie $(kp)^{-1/2}$ (vgl. 23), für die folgenden Maxima, die nach (16') berechnet sind, verhält sich der Lichtvektor wie $(kp)^{-1/2}$. Im geometrischen Schatten erhalten wir einen raschen experimentellen Abfall der Intensität.

§ 7. Die Intensitätsverteilung auf einer Senkrechten zur Achse durch die Spitze der Brennpunktlinie.

Liegt der Aufpunkt auf der Y -Achse, so ist nach § 3 (S. 368) unter Benutzung der Abkürzung $\varrho = \left(\frac{2y}{p} \right)^{1/2}$ der reelle Sattelpunkt φ_1 gegeben durch $\operatorname{tg} \varphi_1 = -\varrho$, der im Gebiete $U < 0$ gelegene Sattelpunkt φ_3 durch

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = -\omega^2 \varrho, \quad \text{wobei} \quad \omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Die Integrale J_1 und J_3 über diese Sattelpunkte haben wir auszuwerten.

Zur Berechnung von J_1 setzen wir

$$(25) \quad \varphi = \varphi_1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \delta, \quad d\varphi = e^{i\frac{\pi}{4}} d\delta;$$

daher

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} w(\varphi) &= w_1 + \frac{w_1''}{2!} e^{i\frac{\pi}{2}} \delta^2 + \frac{w_1'''}{3!} e^{i\frac{3\pi}{4}} \delta^3 + \frac{w_1^{IV}}{4!} e^{i\pi} \delta^4 \\ &\quad + \frac{w_1^V}{5!} e^{i\frac{5\pi}{4}} \delta^5 + \dots, \end{aligned} \right.$$

wenn wieder $w(\varphi_1) = w_1$ usw. gesetzt wird. Um die Werte von w_1 und seine Abgeleiteten zu erhalten, haben wir die Ausdrücke (6) für

$$\varphi = \varphi_1, \quad x = 0, \quad y = \frac{p}{2} \varrho^3$$

zu nehmen und $\operatorname{tg} \varphi_1$ durch $-\varrho$, also $\sin \varphi_1$ und $\cos \varphi_1$ durch

$$\frac{-\varrho}{\sqrt{1+\varrho^2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{1+\varrho^2}}$$

zu ersetzen; entwickeln wir die erhaltenen Ausdrücke gleich nach Potenzen von ϱ , so ergibt sich

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} w_1 &= i k p \left(1 - \frac{1}{2} \varrho^2 \right) \sqrt{1+\varrho^2} - i k p \\ &= -\frac{3}{8} i k p \varrho^4 \left(1 - \frac{1}{3} \varrho^2 + \frac{3}{16} \varrho^4 - \dots \right), \\ w_1'' &= \frac{3}{2} i k p \varrho^3 \sqrt{1+\varrho^2} \\ &= \frac{3}{2} i k p \varrho^2 \left(1 + \frac{1}{2} \varrho^2 - \frac{1}{8} \varrho^4 + \dots \right), \\ w_1''' &= -3 i k p \varrho \sqrt{1+\varrho^2}^3 \\ &= -3 i k p \varrho \left(1 + \frac{3}{2} \varrho^2 + \frac{3}{8} \varrho^4 - \dots \right), \\ w_1^{IV} &= 3 i k p \left(1 + \frac{9}{2} \varrho^2 + 4 \varrho^4 \right) \sqrt{1+\varrho^2} \\ &= 3 i k p \left(1 + 5 \varrho^2 + \frac{49}{8} \varrho^4 + \dots \right), \\ w_1^V &= -30 i k p \varrho (1 + 2 \varrho^2) \sqrt{1+\varrho^2}. \end{aligned} \right.$$

Da für $y = 0$, also auch $\varrho = 0$, sowohl w_1'' als auch w_1''' verschwinden und erst w_1^{IV} von Null verschieden ist, müssen wir für kleine ϱ die Glieder wenigstens bis 4. Ordnung einschließlich berücksichtigen. In der Dissertation ist nachgewiesen, daß wir bis zu Werten $\varrho = \frac{1}{5}$ wegen der schnellen Veränderlichkeit der Phase von $w(\varphi)$ die Glieder fünfter und höherer Ordnung in δ vernachlässigen und als untere Integrationsgrenze $\delta = -\infty$ annehmen dürfen.

Wir führen zunächst in (26) eine neue Variable ε ein

$$\varepsilon^{i\pi \frac{w_1^{IV}}{24i}} \delta^4 = \varepsilon^4, \quad \text{d. h.} \quad \delta = e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{24i}{w_1^{IV}} \right)^{1/4} \varepsilon,$$

so daß

$$w = w_1 + i \left[\varepsilon^4 + \frac{w_1'''}{6i} \left(\frac{24i}{w_1^{IV}} \right)^{3/4} \varepsilon^3 + \frac{w_1''}{2i} \left(\frac{24i}{w_1^{IV}} \right)^{1/2} \varepsilon^2 \right];$$

durch die Substitution

$$(28) \quad \eta = \varepsilon + \frac{w_1'''}{24i} \left(\frac{24i}{w_1^{IV}} \right)^{1/4} = \left(\frac{w_1^{IV}}{24i} \right)^{1/4} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \delta + \frac{w_1'''}{w_1^{IV}} \right)$$

entfernen wir das Glied mit ε^3 und erhalten

$$w = w_1 + i l + i(\eta^4 + m \eta^2 + n \eta);$$

dabei sind l , m , n Abkürzungen für folgende Ausdrücke:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} l &= \frac{1}{2} \left(\frac{w_1'''}{w_1^{IV}} \right)^2 \left(\frac{w_1''}{i} - \frac{\left(\frac{w_1'''}{i} \right)^2}{4 \frac{w_1^{IV}}{i}} \right) \\ &= \frac{3}{8} k p \varrho^4 \left(1 - 4 \varrho^2 + \frac{61}{8} \varrho^4 \dots \right), \\ m &= \frac{1}{2} \left(\frac{24i}{w_1^{IV}} \right)^{1/2} \left(\frac{w_1''}{i} - \frac{\left(\frac{w_1'''}{i} \right)^2}{2 \frac{w_1^{IV}}{i}} \right) \\ &= \frac{15}{4} (2kp)^{1/2} \varrho^4 \left(1 - \frac{53}{10} \varrho^2 + \frac{1791}{80} \varrho^4 - \dots \right), \\ n &= - \left(\frac{24i}{w_1^{IV}} \right)^{1/4} \frac{w_1'''}{w_1^{IV}} \left(\frac{w_1''}{i} - \frac{\left(\frac{w_1'''}{i} \right)^2}{3 \frac{w_1^{IV}}{i}} \right) \\ &= 2^{-1/4} (kp)^{3/4} \varrho^3 \left(1 + \frac{3}{4} \varrho^2 - \frac{87}{4} \varrho^4 + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

m verschwindet wie ϱ^4 , während sich n wie ϱ^3 verhält; wir dürfen daher, wie in der Dissertation zahlenmäßig begründet, das Glied $m\eta^3$ bis zu Werten $\varrho = \frac{1}{5}$ vernachlässigen und uns in der Entwicklung von n auf das erste Glied beschränken, also setzen

$$(30) \quad n = 2^{-1/4} (kp)^{3/4} \varrho^3 = (2kp)^{3/4} \frac{y}{p}.$$

Die von der Integrationsvariablen η unabhängigen Glieder sind

$$w_1 + il = -\frac{11}{8} i k p \varrho^6 + \frac{357}{128} i k p \varrho^8 + \dots = -\frac{11}{2} i k p \left(\frac{y}{p}\right)^2,$$

wenn wir auch hier die höheren Glieder vernachlässigen. In derselben Näherung wird nach (28)

$$d\delta = e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} d\eta.$$

Setzen wir diese Werte in J_1 ein, so ergibt sich schließlich

$$(31) \quad J_1 = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} e^{-\frac{11}{2} i k p \left(\frac{y}{p}\right)^2} \int_{-\infty}^{\bar{\eta}_1} e^{i(\eta^4 + n\eta)} d\eta.$$

Die Integration ist zu erstrecken zunächst von $\delta = -\infty$ bis zu einem weiter unten zu bestimmenden $\delta = \delta_1$, also nach η

von $-e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \infty$ bis $\eta = \bar{\eta}_1$, das sich aus (28) ergibt. Wir

deformieren den Integrationsweg von $-e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \infty$ bis Null und von da nach $\bar{\eta}_1$; im ersten Integral dürfen wir als Integrationsgrenzen $-\infty$ und 0 wählen, da der Exponent für große Werte von η , deren Phase im Intervall $-\frac{3\pi}{4} \dots -\pi$ liegt, einen großen negativen reellen Teil hat.

Den Integrationsweg über φ_3 wählen wir parallel zur Ξ -Achse, setzen also

$$\varphi = \varphi_3 + \delta, \quad d\varphi = d\delta;$$

daher wird bis auf Glieder vierter Ordnung einschließlich

$$w = w_3 + \frac{w_3''}{2} \delta^2 + \frac{w_3'''}{6} \delta^3 + \frac{w_3^{IV}}{24} \delta^4.$$

Führen wir als neue Integrationsvariable η ein:

$$(28') \quad \eta = \left(\frac{w_3^{IV}}{24i}\right)^{1/4} \cdot \left(\delta + \frac{w_3'''}{w_3^{IV}}\right),$$

so nimmt der Exponent dieselbe Form wie bei J_1 an:

$$w = w_3 + il + i(\eta^4 + m\eta^2 + n\eta),$$

wo l, m, n dieselben Ausdrücke sind wie in (29), nur daß $\omega^2 \varrho$ an Stelle von ϱ zu setzen ist. Wie in J_1 dürfen wir $m\eta^2$ vernachlässigen und uns in $n, w_3 + il, d\delta$ auf die ersten Glieder beschränken; wir erhalten dann dieselben reellen Werte wie bei J_1 , und es wird

$$(31) \quad J_3 = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} e^{-\frac{11}{2} i kp \left(\frac{y}{p}\right)^2} \int_{\bar{\eta}_3}^{\infty} e^{i(\eta^4 + n\eta)} d\eta.$$

Um nun die Integrationsgrenzen δ_1 und δ_3 für δ zu bestimmen, bringen wir die als geradlinig angenommenen Integrationswege über φ_1 und φ_3 zum Schnitt:

$$\varphi_1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \delta_1 = \varphi_3 + \delta_3;$$

φ_1 und φ_3 ersetzen wir durch ihre in § 3 (S. 368) berechneten Werte:

$$-\operatorname{arctg} \varrho + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \delta_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\varrho}{1-\varrho^2} + \frac{i}{4} \log \frac{1+\sqrt{3}\varrho+\varrho^2}{1-\sqrt{3}\varrho+\varrho^2} + \delta_1.$$

Durch Vergleichen der reellen und imaginären Bestandteile finden wir hieraus δ_1 und δ_3 , und zwar wird bis auf Glieder fünfter Ordnung (die Glieder mit ϱ^3 sind Null):

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \varrho, \quad \delta_3 = -\frac{3-\sqrt{3}}{2} \varrho.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (28) und (28') ergeben sich die Integrationsgrenzen $\bar{\eta}_1$ und $\bar{\eta}_3$, die sich erst in Gliedern dritter Ordnung unterscheiden (vgl. Dissertation). Bilden wir nun

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi \mathfrak{P} = J_1 + J_3 &= \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} e^{-\frac{11}{2} i kp \left(\frac{y}{p}\right)^2} \\ &\quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\eta^4 + n\eta)} d\eta + \int_{\bar{\eta}_3}^{-\bar{\eta}_1} e^{i(\eta^4 + n\eta)} d\eta \right), \end{aligned} \right.$$

so verhält sich das zweite Integral nach dem Mittelwertsatz auch wie ϱ^3 , darf also gegenüber dem ersten vernachlässigt werden.

Setzen wir zur Abkürzung

$$F(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\eta^4 + n\eta) d\eta, \quad G(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\eta^4 + n\eta) d\eta,$$

so wird die Intensität

$$(32') \quad \pi^2 |\mathfrak{P}|^2 = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} [F(n)^2 + G(n)^2],$$

wobei das Argument von F und G

$$n = (2kp)^{1/4} \frac{y}{p}$$

ist.

In der Dissertation sind für $F(n)$ und $G(n)$ konvergente und halbkonvergente Reihen und Tabellen angegeben; nach diesen wurde $F^2 + G^2$, das der Intensität proportional ist, berechnet und in Fig. 9 zur Abszisse y/λ aufgetragen. Man er-

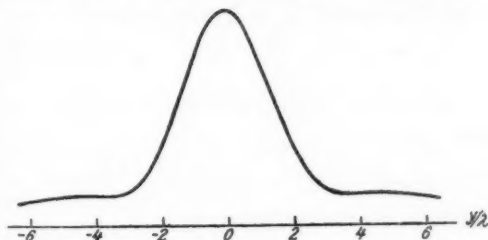


Fig. 9.

hält zu beiden Seiten des der Spitze der Brennpunktlinie entsprechenden hohen Maximums, das einem Verhalten von \mathfrak{P} wie $(kp)^{-1/4}$ entspricht, einen raschen Abfall der Intensität bis zu einem Minimum, das das 0,135fache des Maximums beträgt und bei $y = 3,7 \lambda$ liegt. Diesem folgt bis etwa $y = 4,5 \lambda$ ein kaum merklicher Anstieg bis zum 1,03fachen des Minimums und weiterhin ein sehr langsamer Abfall der Intensität. Daß diese immer noch merklich von Null verschieden ist, kommt daher, daß der Aufpunkt dem Gebiete I (Fig. 6) angehört, durch dessen Punkte ein Lichtstrahl im Sinne der geometrischen Optik geht. Bei nicht zu kleiner Öffnung des Bündels wird die Y -Achse von den Randstrahlen erst in größerer Entfernung geschnitten (für $\alpha = 30^\circ$ bei $y = 0,29 p$), so daß

die von den Randstrahlen herrührenden Beugungserscheinungen bei etwa $y = 10 \lambda$ noch nicht in Frage kommen.

Für größere Entfernung von der Spitze der Brennnlinie läßt sich die Intensität wie in § 5 berechnen, wenn man die Entwicklung (26) für $w(\varphi)$ mit dem quadratischen Glied abbricht.

§ 8. Die Intensitätsverteilung auf der Achse der Brennnlinie.

Je nachdem der Aufpunkt auf der Achse des Bündels ($y = 0$) im Innern ($x > 0$) oder im Äußern ($x < 0$) der Brennnlinie liegt, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

A. Ist $x > 0$, so sind nach § 3 (S. 370) die Sattelpunkte bei Benutzung der Abkürzung $\sigma^2 = \frac{2x}{p}$ bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\sigma, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = +\sigma.$$

Über diese drei reellen Sattelpunkte haben wir zu integrieren.

Für den Sattelpunkt $\varphi_2 = 0$ wird nach (6)

$$w_2 = i k x, \quad w_2'' = -i k x, \quad w_2''' = 0, \quad w_2^{IV} = 3 i k p \left(1 + \frac{x}{3p}\right).$$

$$w_2^V = 0, \quad w_2^{VI} = 30 i k p \left(1 - \frac{x}{30p}\right).$$

Wir setzen

$$\varphi = e^{-i \frac{\pi}{4}} \delta, \quad d\varphi = e^{-i \frac{\pi}{4}} d\delta,$$

führen σ statt x ein und erhalten so

$$w(\varphi) = \frac{i k p}{2} \sigma^2 - \frac{k p}{4} \sigma^2 \delta^2 - \frac{i k p}{8} \left(1 + \frac{1}{6} \sigma^2\right) \delta^4 - \frac{k p}{24} \left(1 - \frac{1}{60} \sigma^2\right) \delta^6 - \dots$$

Da w_2'' für kleine σ verschwindet, müssen wir das Glied vierter Ordnung beibehalten. Die als geradlinig angenommenen Integrationswege über die Sattelpunkte bringen wir zum Schnitt, nehmen also als Integrationsgrenzen für δ die Katheten gleichschenkelig-rechtwinkliger Dreiecke mit der Hypotenuse $\varphi_3 = \operatorname{arctg} \sigma$, also

$$\delta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sigma.$$

Die abzuleitenden Formeln benutzen wir für Werte von σ^2 bis etwa $\frac{1}{30}$, also $x = \frac{p}{60}$; für solche Werte darf aber das Glied sechster Ordnung in der Entwicklung für $w(\varphi)$ vernach-

lässtig werden, ebenso im Glied vierter Ordnung $\frac{1}{8} \sigma^2$ gegenüber 1.

Führen wir als neue Integrationsvariable η ein durch die Beziehung

$$e^{-i \frac{\pi}{2}} \frac{k p}{8} \delta^4 = e^{i \frac{\pi}{2}} \eta^4, \quad \text{also} \quad \delta = e^{i \frac{\pi}{4}} \left(\frac{8}{k p} \right)^{1/4} \eta,$$

so wird

$$w(\varphi) = \frac{i k p}{2} \sigma^2 + i \left[\eta^4 - \left(\frac{k p}{2} \right)^{1/2} \sigma^2 \eta^2 \right],$$

und die Integrationsgrenzen für η werden $\mp \bar{\eta}_2$, wo

$$\bar{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \left(\frac{k p}{8} \right)^{1/4} \arctg \sigma.$$

Daher

$$(33) \quad J_2 = \left(\frac{8}{k p} \right)^{1/4} e^{\frac{i k p}{2} \sigma^2} \int_{-\bar{\eta}_2}^{+\bar{\eta}_2} e^{i(\eta^4 - m \eta^2)} d\eta,$$

wenn

$$(34) \quad m = \left(\frac{k p}{2} \right)^{1/2} \sigma^2.$$

Man könnte J_2 leicht in ein Integral mit reellen Grenzen verwandeln; wir sehen davon ab, da sich J_2 im Schlußresultat doch fortheben wird.

Zur Berechnung von J_3 setzen wir $\tg \varphi_3 = \sigma$ und die daraus folgenden Werte

$$\sin \varphi_3 = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}}, \quad \cos \varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}},$$

ferner

$$x = \frac{p}{2} \sigma^2, \quad y = 0$$

in (6) ein und erhalten

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_3 = i k p (\sqrt{1 + \sigma^2} - 1), \quad w_3'' = i k p \sigma^2 \sqrt{1 + \sigma^2}, \\ w_3''' = 3 i k p \sigma \sqrt{1 + \sigma^2}^3, \\ w_3^{IV} = 3 i k p \left(1 + \frac{14}{3} \sigma^2 + 4 \sigma^4 \right) \sqrt{1 + \sigma^2}, \\ w_3^V = 30 i k p \sigma (1 + 2 \sigma^2) \sqrt{1 + \sigma^2}^3. \end{array} \right.$$

Führt man, wie früher, δ ein:

$$\varphi = \varphi_3 + e^{i \frac{\pi}{4}} \delta,$$

so nimmt w die Form (26) an. Für $\sigma^2 = \frac{1}{80}$ wird, wie man sich leicht überzeugt, w eine schnell veränderliche Funktion, das Integral also Null, wenn etwa $\delta \geq \frac{1}{10}$; für $\delta \leq \frac{1}{10}$ sind aber die Glieder fünfter und höherer Ordnung unwesentlich.

Führen wir, wie in § 7 (S. 386), statt δ zunächst die Variable ε und dann η ein, so nimmt w wieder die Form an

$$w(\varphi) = w_3 + i l + i(\eta^4 - m \eta^2 - n \eta);$$

dabei ist

$$(36) \left\{ \begin{aligned} l &= \frac{1}{2} \left(\frac{w_3'''}{w_3^{IV}} \right)^2 \left(\frac{w_3''}{i} - \frac{\left(\frac{w_3'''}{i} \right)^2}{4 \frac{w_3^{IV}}{i}} \right) = \frac{k p}{8} \sigma^4 \left(1 + \frac{7}{6} \sigma^2 - \dots \right) \\ m &= -\frac{1}{2} \left(\frac{24 i}{w_3^{IV}} \right)^{1/2} \left(\frac{w_3''}{i} - \frac{\left(\frac{w_3'''}{i} \right)^2}{2 \frac{w_3^{IV}}{i}} \right) \\ &= \left(\frac{k p}{2} \right)^{1/2} \sigma^2 \left(1 - \frac{121}{12} \sigma^2 + \dots \right) \\ n &= \left(\frac{24 i}{w_3^{IV}} \right)^{1/2} \frac{w_3'''}{w_3^{IV}} \left(\frac{w_3''}{i} - \frac{\left(\frac{w_3'''}{i} \right)^2}{3 \frac{w_3^{IV}}{i}} \right) \\ &= \frac{8}{3} (2 k p)^{1/2} \sigma^5 (1 - 8 \sigma^2 + \dots). \end{aligned} \right.$$

Im Exponenten unter dem Integralzeichen verhält sich der Faktor n von η wie σ^5 , während der Faktor m von η^2 wie σ^2 verschwindet. Für Werte von σ^2 bis $\frac{1}{80}$ darf daher das Glied $n \eta$ vernachlässigt und außerdem m durch sein erstes Glied ersetzt werden (vgl. die zahlenmäßige Begründung in der Dissertation). Dadurch erhält aber der Integrand von J_3 dieselbe charakteristische Form wie J_2 und denselben Parameter (34)

$$m = \left(\frac{k p}{2} \right)^{1/2} \sigma^2.$$

Die Integrationsgrenzen in δ sind $-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sigma$, $+\infty$, in η also

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_3 &= \left(\frac{w_3^{IV}}{24 i} \right)^{1/2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{\pi}{4}} \operatorname{arctg} \sigma + \frac{w_3'''}{w_3^{IV}} \right) \\ &= \left(\frac{k p}{8} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \sigma - \frac{137 + 23 i}{48} \sigma^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

und

$$e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \infty;$$

vernachlässigen wir in η_3 die Glieder von σ^3 an, so wird $\eta_3 = \eta_2$. Wir zerlegen J_3 in zwei Integrale von η_3 bis 0 und von 0 bis $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \infty$; in letzterem dürfen wir als Grenzen 0 und ∞ wählen. Berücksichtigen wir auch von dem vor das Integral tretenden Faktor

$$\left(\frac{24i}{w_3^{IV}}\right)^{1/4} = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} \left(1 - \frac{31}{24}\sigma^2 + \dots\right)$$

nur das erste Glied, ebenso von

$$w_3 + il = \frac{ikp}{2}\sigma^2 + \frac{5}{32}ikp\sigma^6 - \dots,$$

wobei sich die Glieder vierter Ordnung ohnehin wegheben, so wird

$$J_3 = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} e^{ikz} \left(\int_0^\infty e^{i(\eta^4 - m\eta^2)} d\eta + \int_{\eta_3}^0 e^{i(\eta^4 - m\eta^2)} d\eta \right).$$

Da für $y = 0$ $w(\varphi)$ nach (6) eine gerade Funktion von φ ist, so wird $J_1 = J_3$. In der Summe $J_1 + J_2 + J_3$ der Integrale über die drei Sattelpunkte hebt sich also J_2 auf gegen das zweite in J_1 und J_3 auftretende Integral und wir erhalten schließlich für den Lichtvektor

$$(37) \quad \mathfrak{P} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} e^{ikz} \int_0^\infty e^{i(\eta^4 - m\eta^2)} d\eta$$

mit der Abkürzung

$$m = (2kp)^{1/2} \frac{x}{p}.$$

Setzen wir

$$K(m) = \int_0^\infty \cos(\eta^4 - m\eta^2) d\eta, \quad L(m) = \int_0^\infty \sin(\eta^4 - m\eta^2) d\eta,$$

so wird die Intensität

$$(37') \quad |\mathfrak{P}|^2 = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{2}{kp}\right)^{1/2} [K(m)^2 + L(m)^2].$$

Die Funktionen $K(m)$ und $L(m)$ sind in der Dissertation diskutiert; sie hängen, wie auch hier bemerkt sei, in folgender Weise mit den Besselschen Funktionen $J_{\pm 1/4}$ zusammen:

$$K(m) = \frac{\pi}{8} \sqrt{2m} \left\{ \cos \frac{m^2 + \pi}{8} \cdot J_{1/4} \left(\frac{m^2}{8} \right) + \cos \frac{m^2 - \pi}{8} J_{-1/4} \left(\frac{m^2}{8} \right) \right\}$$

$$L(m) = -\frac{\pi}{8} \sqrt{2m} \left\{ \sin \frac{m^2 + \pi}{8} J_{1/4} \left(\frac{m^2}{8} \right) + \sin \frac{m^2 - \pi}{8} J_{-1/4} \left(\frac{m^2}{8} \right) \right\}$$

Für größere Werte von σ^2 dürfen wir die Entwicklung von w mit dem quadratischen Glied abbrechen und als Integrationsgrenzen für $\delta \mp \infty$ annehmen. Wir erhalten

$$J_1 = e^{\frac{ikp}{2}\sigma^2 - i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{kp}{4}\sigma^2 \delta^2} d\delta = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{kp}} e^{\frac{ikp}{2}\sigma^2 - i\frac{\pi}{4}},$$

$$J_1 = J_3 = e^{w_3 + i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{w_3''}{2i}\delta^2} d\delta = \sqrt{\frac{2i\pi}{w_3''}} e^{w_3 + i\frac{\pi}{4}},$$

wo für w_3 und w_3'' ihre Werte (35) einzusetzen sind. Die Summe der drei Integrale liefert wieder bis auf den Faktor den Lichtvektor \mathfrak{P} . Die Intensität wird

$$\pi^2 |\mathfrak{P}|^2 = \frac{4\pi}{kp\sigma^2} + \frac{8i\pi}{w_3''} - \frac{8\pi}{kp\sigma} \sqrt{\frac{2ikp}{w_3''}} \sin \left(\frac{w_3}{i} - \frac{kp}{2}\sigma^2 \right);$$

entwickeln wir zunächst nach Potenzen von σ^2 und führen dann an Stelle von σ^2 dieselbe Variable ein, die wir in dem für die nächste Nähe der Spitze gültigen Ausdruck (37) benutzt haben, nämlich

$$m = \sqrt{\frac{kp}{2}} \sigma^2,$$

so wird unter der Annahme $kp = 10^4$:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} |\mathfrak{P}|^2 &= \frac{6}{\pi} \sqrt{\frac{2}{kp}} \cdot \frac{1}{m} \\ &\cdot \left\{ 1 - 0,00482m + 0,00005m^2 - 0,00000059m^3 \right. \\ &\quad \left. + 0,9428 \cdot (1 - 0,00354m + 0,0000310m^2 \right. \\ &\quad \left. - 0,00000023m^3 + \dots) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{m^2}{4} (1 - 0,00707m + 0,0000625m^2 - \dots) \right\} \end{aligned} \right.$$

B. Liegt der Aufpunkt außerhalb der Brennpunktlinie ($x < 0$) in nächster Nähe der Spitze, so haben wir nach Fig. 5a außer dem reellen Sattelpunkt $\varphi_2 = 0$ auf der imaginären Achse die Sattelpunkte φ_1 , φ_3 symmetrisch zu $\varphi_2 = 0$ in sehr geringer

Entfernung voneinander. Wir dürfen (vgl. die Dissertation) schon von $x = 1,25 \lambda$ an die Entwicklung von w mit dem Glied vierter Ordnung abbrechen und als Integrationsgrenzen für das auf der Fallinie durch $\varphi_2 = 0$ gemessene $\delta \mp \infty$ annehmen. Berechnen wir J_2 in derselben Weise wie im Fall A, so wird

$$J_2 = 2 \left(\frac{8}{kp} \right)^{1/4} e^{ikx} \int_0^{\infty} e^{i(\eta^4 - m\eta^2)} d\eta,$$

wo jetzt

$$m = (2kp)^{1/2} \frac{x}{p} < 0.$$

Für die Intensität ergibt sich also wieder der Wert (37).

Für größere $|x|$ beschränken wir uns auf das Glied mit δ^3 im Exponenten und erhalten

$$J_2 = \sqrt{-\frac{2\pi}{kx}} e^{ikx + i\frac{\pi}{4}},$$

also wird die Intensität

$$(39) \quad |\mathfrak{P}|^2 = -\frac{2}{\pi kx} = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{kp}} \cdot \frac{1}{m}.$$

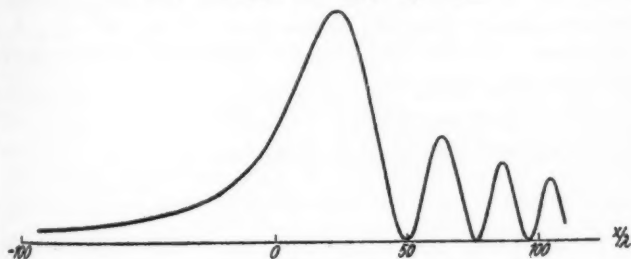


Fig. 10.

Nach (37), (38), (39) wurde die Intensität als Funktion von m berechnet und in Fig. 10 aufgetragen, dabei sind die Abszissenwerte m auf die proportionalen x/λ reduziert nach der Beziehung

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kp}{2}} \cdot m = 11,23 m.$$

Wir erhalten also auf der Achse des Bündels im Innern der Brennpunktlinie Schwankungen, im Äußern eine monotone Abnahme der Intensität. Das erste hohe Maximum, entsprechend einem Verhalten von \mathfrak{P} wie $(kp)^{-1/4}$, fällt nicht mit der Spitze der

Brennlinie zusammen, sondern liegt bei unserer Annahme $kp = 10^4$ an der Stelle $x = 24,5 \lambda$. Man vergleiche hierzu das ähnliche Verhalten der Intensität beim Übergang über einen beliebigen Punkt der Brennlinie (Fig. 7), wo auch das Maximum nicht mit dem Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Strahlen zusammenfällt. Die folgenden Maxima nehmen langsam ab und folgen sich in allmählich kleiner werdenden Abständen. Im ersten Minimum beträgt die Intensität 1,5 Proz. des ersten Maximums, in den folgenden wird sie immer kleiner.

§ 9. Die von den Randstrahlen herrührenden Beugungserscheinungen.

Bei den Intensitätsberechnungen der letzten Paragraphen haben wir lediglich Integrale über Sattelpunkte ausgewertet; in diesem Paragraphen haben wir den beugenden Einfluß der geradlinigen Begrenzung des Bündels zu berechnen.

Die Randstrahlen seien (Fig. 6) unter den Winkeln $\pm \alpha$ gegen die Achse des Bündels geneigt; wir haben dann in der komplexen q -Ebene die von den Punkten $\pm \alpha$ längs Falllinien zu erstreckenden Integrale auszuwerten, die wir mit $J_{+\alpha}$, $J_{-\alpha}$ bezeichnen. Da diese Falllinien im allgemeinen Senkrechte zur Ξ -Achse sind, setzen wir

$$q = \alpha + i\delta, \quad dq = i d\delta.$$

Entwickeln wir $w(q)$ nach Potenzen von δ :

$$(40) \quad w(q) = w(\alpha) + i w'(\alpha) \delta - \frac{w''(\alpha)}{2} \delta^2 - i \frac{w'''(\alpha)}{6} \delta^3 + \dots,$$

so ist der reelle Teil U von $w(q)$ durch die ungeraden, der imaginäre Teil V durch die geraden Potenzen von δ gegeben. Der Integrationsweg ist in das Gebiet negativen reellen Teils von w zu erstrecken, als Integrationsgrenzen also $\delta = 0$ und $\delta = \pm \infty$ zu wählen, je nachdem

$$i w'(\alpha) = \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{q=\alpha} \leq 0$$

ist.

Nehmen wir zunächst an, daß in der Entwicklung (40) das Glied mit δ ausschlaggebend ist, daß also $w'(\alpha)$ nicht zu kleine Werte annimmt; dies bedeutet, da nach S. 365 $\frac{w'(\alpha)}{ik}$ der Abstand des Aufpunktes vom Randstrahl α ist, daß der Aufpunkt

in nicht zu große Nähe des Randstrahls rücken soll. Dann wird

$$(41) \quad J_{+\alpha} = -\frac{1}{w'(\alpha)} e^{w(\alpha)}, \quad J_{-\alpha} = -\frac{1}{w'(-\alpha)} e^{w(-\alpha)},$$

wie man sich leicht überzeugt, unabhängig davon, ob $\frac{w'(\alpha)}{i} \equiv 0$.

$J_{\pm\alpha}$ verhalten sich also wie $(kp)^{-1}$, während die Integrale über die Sattelpunkte höchstens wie $(kp)^{-1/2}$ verschwinden. Wird, wie bisher immer in den Zahlenbeispielen, $kp = 10^4$ angenommen, so ist also der Fehler klein, wenn wir $J_{\pm\alpha}$ gegenüber den Integralen über die Sattelpunkte vernachlässigen; anders ausgedrückt, die Lichtbewegung ist unabhängig von der Öffnung des Bündels, solange der Aufpunkt nicht in nächster Nähe der Randstrahlen liegt. Unter dieser Einschränkung ist also die Intensität mit hinreichender Genauigkeit durch die in den letzten Paragraphen angegebenen Formeln und Kurven wiedergegeben.

Für kleine Werte von $w'(\alpha)$ haben wir das Glied mit δ^2 zu berücksichtigen, also

$$w(\varphi) = w(\alpha) - \frac{w'(\alpha)}{i} \delta - \frac{w''(\alpha)}{2} \delta^2$$

zu setzen. Ist gleichzeitig $w'(\alpha)$ und $w''(\alpha)$ klein, so liegt der Aufpunkt in der Nähe des Berührungspunktes des Randstrahls α , in dem die Gebiete 0, I, II zusammenstoßen (Fig. 6). Von diesem besonderen Fall, in dem das Glied mit δ^3 zu berücksichtigen wäre, sehen wir ab.

Den Exponenten $w(\varphi)$ bringen wir durch Einführung einer neuen Variablen auf die Normalform des Fresnelschen Integrals. Dabei setzen wir $\frac{w''(\alpha)}{i} > 0$ voraus, $\frac{w''(\alpha)}{i} < 0$ wäre

ähnlich zu behandeln; je nachdem $\frac{w'(\alpha)}{i} \equiv 0$, also $\delta \equiv 0$, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist $\frac{w'(\alpha)}{i} > 0$, liegt also der Aufpunkt in Richtung des einfallenden α gesehen rechts von diesem, so wird

$$w(\varphi) = w(\alpha) - \frac{w'(\alpha)^2}{2w''(\alpha)} - i \left(\sqrt{\frac{w''(\alpha)}{2i}} \delta - \frac{w'(\alpha)}{\sqrt{2w''(\alpha)}} \right)^2;$$

wir setzen

$$\sqrt{\frac{w''(\alpha)}{2i}} \delta - \frac{w'(\alpha)}{\sqrt{\frac{2w''(\alpha)}{i}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \eta,$$

$$d\varphi = e^{\frac{i\pi}{2}} d\delta = e^{\frac{i\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi i}{w''(\alpha)}} d\eta.$$

Der unteren Grenze $\delta = 0$ entspricht

$$(42) \quad \eta = -i\bar{\eta} = -i \frac{w'(\alpha)}{i} \sqrt{\frac{i}{\pi w''(\alpha)}},$$

wo $\bar{\eta}$ unter unserer Voraussetzung: $\frac{w'(\alpha)}{i}$ klein, $\frac{w''(\alpha)}{i}$ groß, eine mäßige positive reelle Zahl ist. Der oberen Grenze $\delta = \infty$ entspricht auch $\eta = \infty$. Wir erhalten so

$$J_{+\alpha} = \sqrt{\frac{\pi i}{w''(\alpha)}} e^{\frac{w(\alpha)}{i} - \frac{w'(\alpha)^2}{2w''(\alpha)}} + i \frac{\pi}{2} \int_{-i\bar{\eta}}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta.$$

Das Integral zerlegen wir in die Summe zweier Integrale mit den Grenzen $-i\bar{\eta}$, 0 und 0, ∞ ; das zweite Integral hat den

Wert $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$; im ersten Integral führen wir als neue Variable η' ein durch die Beziehung

$$\eta = e^{-i\frac{\pi}{2}} \eta', \text{ also } d\eta = e^{-i\frac{\pi}{2}} d\eta', \quad -i\frac{\pi}{2} \eta^2 = i\frac{\pi}{2} \eta'^2;$$

die Integrationsgrenzen werden dann $\bar{\eta}$, 0. Bezeichnen wir die Integrationsvariable wieder mit η , so wird schließlich

$$(43) \quad J_{+\alpha} = \sqrt{\frac{\pi i}{w''(\alpha)}} e^{\frac{w(\alpha)}{i} - \frac{w'(\alpha)^2}{2w''(\alpha)}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\bar{\eta}} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta \right).$$

Die Werte $w(\alpha)$, $w'(\alpha)$, $w''(\alpha)$ ergeben sich aus (6) für $\varphi = \alpha$, $\bar{\eta}$ hat den Wert (42).

Im Falle $\frac{w'(\alpha)}{i} < 0$ ergibt sich durch eine ähnliche Rechnung

$$(43') \quad J_{+\alpha} = -\sqrt{\frac{\pi i}{w''(\alpha)}} e^{\frac{w(\alpha)}{i} - \frac{w'(\alpha)^2}{2w''(\alpha)}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} - \int_0^{-\bar{\eta}} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta \right),$$

wobei $\bar{\eta}$, das wieder durch (42) definiert ist, negativ wird.

Liegt der Aufpunkt in nächster Nähe des Randstrahls $-\alpha$,
 80 ist $\frac{w'(-\alpha)}{i}$ klein und für $J_{-\alpha}$ ergeben sich dieselben
 Werte (43) und (43'), nur daß $-\alpha$ an Stelle von $+\alpha$ tritt.

Für Aufpunkte in der Nähe der Randstrahlen verhalten
 sich also die Integrale $J_{\pm\alpha}$ wie $(kp)^{-1/2}$, sind daher von der-
 selben Größenordnung wie die Integrale über die Sattelpunkte,
 wenn der Aufpunkt nicht zu nahe der Brennpunktlinie liegt (vgl.
 15 und 15'). Wir bemerken noch, daß (43) und (43') nicht nur für
 kleine, sondern für beliebige Werte von $\frac{w'(a)}{i}$ gelten; für
 große $\frac{w'(\alpha)}{i}$ gehen (43) und (43') in (41) über, wie sich unmittelbar
 ergibt, wenn man die Fresnelschen Integrale durch die beiden
 ersten Glieder ihrer asymptotischen Entwicklung ersetzt; in der
 Tat wird $\bar{\eta}$ für diesen Fall eine große Zahl.

Es sei mir auch an dieser Stelle gestattet, meinem hoch-
 verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. Sommerfeld für die An-
 regung zu dieser Arbeit und für das stete Interesse an ihrem
 Fortschreiten meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 14. April 1923.)

4. *Über die Bremsung bewegter Ladungen beim Überfliegen leitender Körper*¹⁾; von Wilhelm Peter Radt.

Inhalt: § 1. Der Hertzsche Versuch. — § 2. Darstellung des elektrischen Feldes durch Potentiale. — § 3. Form der Potentiale und Grenzbedingungen. — § 4. Verhalten der Influenzladung. — § 5. Bremskraft für rechteckige Ladungen. — § 6. Bremskraft für Punktladungen. — § 7. Integration der Bewegungsgleichung. — § 8. Kraft senkrecht zur Leiteroberfläche. — § 9. Berücksichtigung endlicher Plattendicke. — § 10. Punktförmige Ladungen, die durch einen Hohlzylinder fliegen. — § 11. Kathodenstrahlteilchen von der Geschwindigkeit $q = 10^9$ cm/sec⁻¹. — § 12. Möglichkeit experimenteller Prüfung.

§ 1. Der Hertzsche Versuch.

Heinrich Hertz²⁾ hat folgenden Versuch angestellt: An den Enden einer wagerechten Nadel befanden sich zwei rechteckige Kupferscheiben, die über einer leitenden Glascheibe schwebten. Die Nadel konnte um einen in ihrer Mitte befestigten Draht Torsionsschwingungen ausführen. Hertz beobachtete die *Zunahme der Dämpfung*, die eintrat, wenn er die Kupferscheiben mit Hilfe von Nadel und Draht an *Spannung* legte.

Weitere Versuche ähnlicher Art, sowie eine zahlenmäßige Berechnung dieser Wirkung sind mir *nicht* bekannt. Im Anschluß hieran sollen mit Hilfe der Maxwell'schen Theorie zwei besondere Fälle von *Bremsung bewegter Ladungen* untersucht werden. Über der ebenen Oberfläche eines unendlich ausgedehnten Leiters bewegt sich in einer Ebene parallel zur Oberfläche mit gleichförmiger Geschwindigkeit eine Ladung, die gleichmäßig auf ein Rechteck verteilt ist. Das Rechteck soll sich späterhin auf einen Punkt zusammenziehen, wobei die Ergebnisse eine erheblich übersichtlichere Gestalt annehmen.

1) Auszug aus der Berliner Inaugural-Dissertation 1922.

2) H. Hertz, Ges. Werke 1. S. 143 u. Wied. Ann. 13. S. 274. 1881.

Ohne Rechnung soll dann noch die Lösung einer zweiten Aufgabe angegeben werden, nämlich die Bremskraft zu bestimmen, die auf punktförmige durch die Achse eines unendlich langen Hohlzylinders fliegende Ladungen ausgeübt wird.

Befindet sich eine ruhende Ladung gegenüber einer leitenden Oberfläche, so bildet sich auf dieser die entgegengesetzte Ladung, die *Influenzladung*. Diese wird im Falle der Bewegung der bewegten zu folgen suchen und dabei *zurückbleiben*. Die Anziehungskraft der Influenzladung auf die bewegte erhält also eine *Komponente der Bewegungsrichtung entgegen*. Die verlorene Bewegungsenergie des Ladungsträgers findet sich in der Wärmeentwicklung der Ströme wieder, durch die die Influenzladung immer nachgeschafft wird. Für diese Ströme soll bei allen betrachteten Körpern das Ohmsche Gesetz gelten:

$$J = \sigma \cdot \mathcal{E},$$

wo σ die Leitfähigkeit im elektrostatischen Maße bedeutet. $[\sigma] = t^{-1}$.

Bei den zahllosen Versuchen mit Kathodenstrahlen fliegen diese stets an der Oberfläche guter oder doch mäßiger Leiter vorüber. Der Hertzsche Versuch beweist, daß dann streng genommen eine Geschwindigkeitsverminderung eintritt. Diese ist aber auch bei den besten Präzisionsbestimmungen von e/m nie in Betracht gezogen. Liegt auch wegen der vortrefflichen Übereinstimmung der verschiedenen Messungen dieser Größe die Vermutung nahe, daß die Bremskraft unter der Grenze der zu berücksichtigenden Fehler liegt, so schien doch eine theoretische Berechnung darüber erwünscht.

§ 2. Darstellung des elektrischen Feldes durch Potentiale.

Im ersten Falle seien die Koordinaten des Systems, das mit dem leitenden Körper ruht, x_0, y_0, z_0 . Das System der x, y, z , in dem die Ladung ruht, bewege sich mit der Geschwindigkeit $q = q(t)$ gegen das erste. Es bestehen die Verknüpfungsgleichungen:

$$x = x_0 - q \cdot t; \quad y = y_0; \quad z = z_0.$$

Die Ebene, in der sich die Ladung bewegt, ist $y = y_0 = a$, die Oberfläche des leitenden Körpers $y = y_0 = 0$. Derselbe wird als unendlich ausgedehnt betrachtet. Später ist zu zeigen (§ 9), was die Vernachlässigung der endlichen Dicke ausmacht.

Um die Zeitkoordinate auszuschalten, betrachten wir die Verhältnisse zur Zeit $t = 0$, wo also $x = x_0$ ist. In diesem Augenblicke bestehen im Außenraume wie im Leiter elektrische Felder, die man bei *gegen Lichtgeschwindigkeit kleinem* q zunächst als wirbelfrei ansehen kann. Es lauten die Maxwell'schen Gleichungen im Systeme der x_0, y_0, z_0 :

$$\left. \begin{aligned} c \cdot \text{rot } \mathfrak{H} &= \dot{\mathfrak{D}} + 4\pi J = \varepsilon \dot{\mathfrak{E}} + 4\pi \sigma \mathfrak{E} \\ -c \cdot \text{rot } \mathfrak{E} &= \dot{\mathfrak{B}} \end{aligned} \right\} \text{ im Leiter,}$$

$$\left. \begin{aligned} c \cdot \text{rot } \mathfrak{H} &= \varepsilon \cdot \dot{\mathfrak{E}} \\ -c \cdot \text{rot } \mathfrak{E} &= \dot{\mathfrak{B}} \end{aligned} \right\} \text{ im Außenraume.}$$

Da nun durch die Bewegung der Ladung mit der Zeit keine Veränderung (solange q sich nicht verändert), sondern nur eine Verschiebung in der negativen x_0 -Richtung stattfindet, so ist:

$$\dot{\mathfrak{E}} = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x_0} \cdot q; \quad \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_0} \cdot q.$$

Wir finden $\text{rot rot } \mathfrak{E}$ von der Größenordnung

$$\frac{q^2}{c^2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x_0^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{4\pi q \cdot \sigma}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x_0}.$$

Damit also das hieraus sich ergebende Feld vernachlässigt werden kann gegen das wirbelfreie elektrische Feld, muß, wenn l eine Länge in der Größe der bei der Rechnung in Betracht kommenden, also etwa der Abstand a oder die Kantenlänge der Platten ist, jedesmal die Ungleichung erfüllt sein:

$$\frac{q^2}{c^2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x_0^2} \cdot \frac{l^2}{4} \ll 1; \quad \frac{4\pi \cdot q \cdot \sigma}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x_0} \cdot \frac{l^2}{4} \ll 1.$$

Dann ist also:

$$\text{rot } \mathfrak{E} = 0.$$

Wir bilden dann die Divergenz der ersten Gleichung:

$$c \cdot \text{div rot } \mathfrak{H} = 0 = -\varepsilon \cdot q \cdot \frac{\partial (\text{div } \mathfrak{E})}{\partial x_0} + 4\pi \sigma \cdot \text{div } \mathfrak{E}.$$

Hieraus entspringen Ladungen von der Verteilung:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \text{constans} \cdot e^{\frac{4\pi\sigma}{\epsilon q} \cdot x_0},$$

die in unserem Falle nur mit constans = 0 möglich sind. Im Falle des Außenraumes ergibt das Bilden der Divergenz:

$$\frac{\partial (\operatorname{div} \mathfrak{E})}{\partial x_0} = 0, \text{ also } \operatorname{div} \mathfrak{E} = \text{constans}.$$

Auch von x_0 unabhängige Ladungen haben für uns kein Interesse. Wir werden daher setzen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0.$$

\mathfrak{E} kann somit dargestellt werden als:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

wobei die Potentiale φ der Laplaceschen Gleichung genügen:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Diese Folgerungen wollen wir auf das System der x, y, z übertragen, das mit der Ladung ruht, und von nun an ganz in diesem rechnen.

§ 3. Form der Potentiale und Grenzbedingungen.

In der Ebene $y = a$ soll sich nun eine Ladung E befinden, gleichmäßig verteilt auf ein Rechteck:

$$-\lambda_0 < x < +\lambda_0, \quad -\mu_0 < z < +\mu_0.$$

Die Funktion $f(x, z)$, die die Flächendichte der Ladung in der Ebene $y = a$ darstellt, hat also in diesem Rechteck den konstanten Wert $F = \frac{E}{4\lambda_0\mu_0}$ und verschwindet in der übrigen

Ebene. Nun ist jede Funktion $f(x, z)$ zweier Variablen, wenn sie gewissen Forderungen genügt (die für unser f erfüllt sind), darstellbar als vierfaches bestimmtes Integral, und zwar als der reelle Teil von:

$$f(x, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \cdot f(\lambda, \mu) e^{i\alpha(x-\lambda) + i\beta(z-\mu)}.$$

Mit Einsetzen der Werte von $f(x, z)$ in $f(\lambda, \mu)$ ergibt dies:

$$f(x, z) = \frac{F}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \cdot d\beta \int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} d\lambda \int_{-\mu_0}^{+\mu_0} d\mu \cdot e^{i\alpha(x-\lambda) + i\beta(z-\mu)},$$

die Integration nach λ und μ läßt sich ausführen:

$$f(x, z) = \frac{F}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\alpha \cdot \beta} \cdot \sin(\alpha \lambda_0) \cdot \sin(\beta \mu_0) \cdot e^{i\alpha x + i\beta z}.$$

Die Potentiale sollen die Form haben:

$$\varphi = \frac{F}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\alpha \cdot \beta} \sin(\alpha \lambda_0) \cdot \sin(\beta \mu_0) \cdot e^{i\alpha x + i\beta z} \cdot g(y, \alpha, \beta),$$

wo g von x und z unabhängig sein soll. Da φ der Laplace'schen Gleichung genügen muß, ergibt sich für $g(y)$ die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$(\alpha^2 + \beta^2) \cdot g(y) = \frac{d^2 g}{dy^2},$$

deren Lösung ist:

$$g = C_1 \cdot e^{+y\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + C_2 \cdot e^{-y\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Die Größen, die sich auf den Raum $y \geq a$ beziehen, erhalten den Index 1; die sich auf den Raum $a \geq y \geq 0$ beziehen, den Index 2; die sich auf den Raum $y \leq 0$ beziehen, den Index 3.

Es wird also:

$$\varphi_1 = \frac{F}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\alpha \cdot \beta} \sin(\alpha \lambda_0) \cdot \sin(\beta \mu_0) \cdot e^{i\alpha x + i\beta z} \cdot A_1 \cdot e^{-y\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

$$\varphi_2 = \frac{F}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\alpha \cdot \beta} \sin(\alpha \lambda_0) \cdot \sin(\beta \mu_0) \cdot e^{i\alpha x + i\beta z} [A_2 \cdot e^{-y\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + B_2 \cdot e^{+y\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}],$$

$$\varphi_3 = \frac{F}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\alpha \cdot \beta} \sin(\alpha \lambda_0) \cdot \sin(\beta \mu_0) \cdot e^{i\alpha x + i\beta z} \cdot B_3 \cdot e^{+y\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Denn es muß φ_1 für $y = +\infty$, φ_3 für $y = -\infty$ verschwinden. Zur Bestimmung der vier komplexen Konstanten A_1, A_2, B_2, B_3 erhalten wir vier Grenzbedingungen. Da zunächst die senkrechten Komponenten der elektrischen Verschiebung, die negativen Ableitungen der φ nach y , nicht unendliche Werte annehmen können, dürfen an den Übergangsstellen die Potentiale keine Sprünge erleiden. Daher:

$$(I) \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (\text{für } y = a),$$

$$(II) \quad \varphi_2 = \varphi_3 \quad (\text{für } y = 0).$$

Die Flächendivergenz der elektrischen Erregung ist gleich der Ladungsdichte auf der Fläche mal 4π , wenn also ε_0 die Dielektrizitätskonstante der Luft ist, so gilt:

$$(III) \quad (\mathfrak{D}_y^1)_{y=a} - (\mathfrak{D}_y^2)_{y=a} = \varepsilon_0 \left[- \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=a} + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)_{y=a} \right] = 4\pi f(x, z).$$

An der Oberfläche des Leiters muß die Flächendivergenz des wahren Stromes (Leistungs- + Verschiebungsstromes) wie überall verschwinden. Demnach:

$$4\pi (J_y^3)_{y=0} + (\dot{\mathfrak{D}}_y^3)_{y=0} = (\dot{\mathfrak{D}}_y^2)_{y=0}.$$

Da nun, wie oben erklärt,

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial t} = -q \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial x},$$

so erhalten wir, wenn dem Leiter die Dielektrizitätskonstante ε und die Leitfähigkeit σ zukommen, als vierte Bedingung:

$$(IV) \quad 4\pi\sigma \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)_{y=0} - \varepsilon q \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \cdot \partial y} \right)_{y=0} = -\varepsilon_0 q \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \cdot \partial y} \right)_{y=0}.$$

Wir finden so

$$(1a) \quad \begin{cases} A_2 = -2\pi \frac{e^{-\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} [(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2)]}{\varepsilon_0 \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2} [(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\varepsilon + \varepsilon_0)^2]} \\ \quad - i \cdot 4\pi \frac{q \cdot \alpha \cdot (4\pi\sigma) \cdot e^{-\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \cdot [(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\varepsilon + \varepsilon_0)^2]}; \\ B_2 = 2\pi \frac{e^{-\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\varepsilon_0 \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}; \\ B_3 = 4\pi \frac{q \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} [q \cdot \alpha (\varepsilon + \varepsilon_0) - i(4\pi\sigma)]}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} [(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\varepsilon + \varepsilon_0)^2]}; \\ A_1 = A_2 + \frac{2\pi \cdot e^{+\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\varepsilon_0 \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \end{cases}$$

Damit sind die Potentiale φ_1 , φ_2 , φ_3 gewonnen.

§ 4. Verhalten der Influenzladung.

Die Differenz der Komponenten der elektrischen Erregung senkrecht zu einer Fläche ist der auf der Fläche vorhandenen

Ladungsdichte mal 4π gleich. Um die Verteilung auf der Oberfläche der Platte zu erfahren, ist also zu bilden:

$$4\pi\rho = (\mathfrak{D}_y^2)_{y=0} - (\mathfrak{D}_y^2)_{y=0} = \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)_{y=0} - \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)_{y=0}$$

eingesetzt

$$4\pi\rho = \frac{F}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\alpha \cdot \beta} \sin(\alpha\lambda_0) \cdot \sin(\beta\mu_0) \cdot e^{i\alpha x + i\beta z} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} [\varepsilon B_3 - \varepsilon_0 B_2 + \varepsilon_0 A_1].$$

Wir lassen λ_0 und μ_0 gegen Null konvergieren, das Rechteck also auf einen Punkt zusammenschrumpfen, und betrachten ferner die Gerade $z = 0$. Dann wird, wenn wir setzen:

$$d = \frac{q(\varepsilon + \varepsilon_0)}{4\pi\sigma},$$

$$\rho = -\frac{E}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta \cdot e^{-a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{1 + d^2\sigma^2} [\cos(\alpha x) - \alpha d \cdot \sin(\alpha x)].$$

Für $q = 0$, d. h. $d = 0$ liegt das Maximum von ρ bei $x = 0$; für $q \neq 0$ wird:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = + \frac{E}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta \cdot \alpha \cdot e^{-a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{1 + d^2\sigma^2} [\alpha \cdot d \cdot \cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)] = 0,$$

die Bedingung des Maximums. Diese ist zum Beispiel erfüllt, wenn innerhalb der Grenzen, wo $e^{-a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ noch nicht den Integranden zum Verschwinden bringt, immer die eckige Klammer verschwindet, d. h. $\operatorname{tg}(\alpha \cdot x) = -\alpha \cdot d$. Ist nun d sehr klein, so kann man für den Tangens das Argument setzen und es wird:

$$x_{\max} = -d = -\frac{q(\varepsilon + \varepsilon_0)}{4\pi\sigma}.$$

Dies gilt angenähert, aber nur für großes a und kleines d . In der Tat tritt demnach ein Zurückbleiben der Influenzladung hinter der bewegten ein.

§ 5. Bremskraft für rechteckige Ladungen.

Die Feldstärkenkomponente in der X -Richtung bei $y = a$ ist:

$$(\mathfrak{E}_x)_{y=a} = -\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)_{y=a} = -\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)_{y=a}.$$

Die Kraft, die auf die rechteckige Ladung ausgeübt wird, ist demnach aus (1) und (1a):

$$\mathfrak{K} = - \int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} dx \int_{-\mu_0}^{+\mu_0} dz \cdot F \cdot \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)_{y=a}.$$

Mit Einsetzen von φ_2 und Integrieren nach x und z wird hiervon der reelle Teil:

$$(2) \mathfrak{K} = -64 \cdot F^2 \cdot q \cdot \sigma \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \frac{\sin^2(\alpha \lambda_0) \cdot \sin^2(\beta \mu_0) \cdot e^{-2\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{\beta^2 \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot [(4\pi\sigma)^2 + q^2 \alpha^2 (s + s_0)^2]}.$$

§ 6. Bremskraft für Punktladungen.

Für eine punktförmige Ladung wird $\sin(\alpha \lambda_0) = \alpha \lambda_0$ usw. und aus (2):

$$\mathfrak{K} = -16 \cdot E^2 \cdot q \cdot \sigma \int_0^{+\infty} d\alpha \int_0^{+\infty} d\beta \frac{\alpha^2 \cdot e^{-2\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot [(4\pi\sigma)^2 + q^2 \alpha^2 (s + s_0)^2]}.$$

Ich setzte hier:

$$d = r \cdot \cos \vartheta, \quad \beta = r \cdot \sin \vartheta, \quad d\alpha \cdot d\beta = r \cdot dr \cdot d\vartheta.$$

$$\mathfrak{K} = -\frac{E^2 \cdot q}{\pi^2 \cdot \sigma} \int_0^{+\infty} dr \cdot r^2 \cdot e^{-2ar} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{\cos^2 \vartheta}{1 + \frac{q^2 \cdot r^2 \cdot (s + s_0)^2}{(4\pi\sigma)^2} \cos^2 \vartheta}.$$

Die Integration nach ϑ ergab:

$$\mathfrak{K} = -\frac{E^2 \cdot q}{\pi^2 \cdot \sigma} \int_0^{\infty} dr \cdot r^2 \cdot e^{-2ar} \frac{\pi \cdot (4\pi\sigma)^2}{2q^2 \cdot r^2 (s + s_0)^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{q^2 (s + s_0)^2}{(4\pi\sigma)^2} r^2}} \right].$$

Ich setzte:

$$(3) \quad j = \frac{8a\pi \cdot \sigma}{q(s + s_0)},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = r \cdot \frac{q(s + s_0)}{4\pi\sigma} = r \cdot \frac{2a}{j}, \quad dr = d\varphi \cdot \frac{j}{\cos^2 \varphi \cdot 2a}.$$

Dann wird:

$$\mathfrak{K} = -\frac{E^2 \cdot j^2}{2a^2 (s + s_0)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi} [1 - \cos \varphi],$$

oder durch partielle Integration:

$$(4) \quad \mathfrak{R} = - \frac{E^2 \cdot j}{2 a^2 (\varepsilon + \varepsilon_0)} \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot e^{-j \cdot \lg \varphi} \cdot \sin \varphi.$$

Das Integral

$$S(j) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot e^{-j \cdot \lg \varphi} \cdot \sin \varphi$$

ist eine Funktion der unter (3) eingeführten Veränderlichen und gehorcht, wie man unschwer nachprüft, der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$S'' - \frac{1}{j} S' + S \left(1 + \frac{1}{j^2} \right) = \frac{1}{j^2}.$$

Das allgemeine Integral der reduzierten Gleichung ist:

$$A \cdot j \cdot J_0(j) + B \cdot j \cdot Y_0(j),$$

wo A, B Konstante und J_0 die Besselsche, Y_0 die Neumannsche Funktion nullter Ordnung ist. Ein partikuläres Integral der kompletten Gleichung ist die Reihe:

$$P(j) = 1 - \frac{j^2}{1^2} + \frac{j^4}{1^2 \cdot 3^2} - \frac{j^6}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} + \frac{j^8}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} - + \dots$$

Also ist das vollständige Integral, das S darstellen muß:

$$S = P(j) + A \cdot j \cdot J_0(j) + B \cdot j \cdot Y_0(j).$$

Für die Werte $j = 0,1$, $j = 0,2$, sowie $j = 1$, $j = 2$ bestimmte ich das Integral S durch mechanische Quadratur und berechne ebenso die Funktion $P(j)$, J_0 und Y_0 entnommen aus Tabellen. Als Mittel der Werte aus der Vereinigung je zweier dieser so erhaltenen vier linearen Gleichungen für A und B erhielt ich:

$$A = -0,115,$$

$$B = +1,000.$$

Zunächst sollen noch die Näherungswerte von $S(j)$ für sehr große und sehr kleine j berechnet werden. Hierbei soll als das eigentlich Veränderliche in j nur die Geschwindigkeit q und die Leitfähigkeit σ betrachtet werden, nicht also a und $(\varepsilon + \varepsilon_0)$.

Wenn zunächst j so groß ist, daß $e^{-j \cdot \lg \varphi}$ den Integranden in $S(j)$ zum Verschwinden bringt außer für so kleine φ -Werte

wo man noch unbeschadet $\sin \varphi = \varphi$ und $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$ setzen kann, so wird näherungsweise:

$$S \sim \int_0^{\pi/2} \varphi \cdot e^{-j \cdot \varphi} \cdot d\varphi = \frac{1}{j^2}.$$

Dann wird nach (4):

$$(4a) \quad \mathfrak{R} = - \frac{E^2 \cdot q}{16\pi \cdot \sigma \cdot a^3}$$

unter der Voraussetzung:

$$2a \gg \frac{q(s + \varepsilon_0)}{4\pi\sigma}.$$

Man sieht aus (4a), daß für große j , d. h. große σ (metallische Leiter) die Bremskraft *unabhängig von ε* wird, die Dielektrizitätskonstante also auch hier sich der Wahrnehmung entzieht.

Ist andererseits j so klein, daß $e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi} = 1$ ist bis auf φ -Werte ganz nahe an $\pi/2$, so wird näherungsweise:

$$S \sim \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cdot d\varphi = 1.$$

Dann wird nach (4):

$$(4b) \quad \mathfrak{R} = - \frac{(4\pi\sigma) \cdot E^2}{q \cdot a (s + \varepsilon_0)^2}$$

unter der Voraussetzung:

$$2a \ll \frac{q(s + \varepsilon_0)}{4\pi\sigma}.$$

\mathfrak{R} verschwindet demnach, wenn ich q und die anderen Größen konstant lasse, bei sehr *großem* wie bei sehr *kleinem* σ ; ebenso wenn mit σ alle Größen außer q konstant bleiben, bei sehr *großem* wie bei sehr *kleinem* q . Da aber q wie σ nur in dem Quotienten q/σ erscheinen, so genügt es, die Abhängigkeit der Kraft von diesem zu betrachten. Wir zerlegen also j in $s \cdot a$, wo:

$$(3a) \quad s = \frac{8\pi\sigma}{q(s + \varepsilon_0)}.$$

\mathfrak{R} bekommt als Funktion von s das Aussehen:

$$\mathfrak{R}(s) = - \frac{E^2}{2(s + \varepsilon_0)} \left\{ \frac{s}{a} \cdot P(s \cdot a) + s^2 [A \cdot J_0(s \cdot a) + B \cdot Y_0(s \cdot a)] \right\}.$$

Um den s -Wert zu finden, bei dem $\Re(s)$ ein Maximum wird, bilde man

$$\frac{d\Re(s)}{ds} = -\frac{E^2}{2(s+s_0)} \left[\frac{1}{a} \cdot P(s \cdot a) + s \cdot P'(s \cdot a) + 2s \{ A \cdot J_0(s \cdot a) + B \cdot Y_0(s \cdot a) \} - s^2 \cdot a^2 \{ A \cdot J_1(s \cdot a) + B \cdot Y_1(s \cdot a) \} \right].$$

Am Maximum muß also folgende Funktion $\Phi(s)$ verschwinden:

$$\Phi(s) = P(j) + s \cdot a \cdot P'(j) + 2s \cdot a \{ A \cdot J_0(j) + B \cdot Y_0(j) \} - s^2 \cdot a^2 \{ A \cdot J_1(j) + B \cdot Y_1(j) \}.$$

$$\Phi(s) = 0 \text{ für } s_{\max}.$$

Hierbei ist $P'(j)$ die Reihe;

$$P'(j) = -\frac{2j}{1^3} + \frac{4j^3}{1^3 \cdot 3^3} - \frac{6j^5}{1^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3} + \frac{8j^7}{1^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3} - + \dots$$

Das Maximum errechnete ich für $j = 1,3$. Wie man sieht, ist nämlich $\Phi(s)$ nicht mehr Funktion von a und s allein, sondern des Produktes $s \cdot a = j$. Die Funktion $U(j) = j \cdot S(j)$, die den wesentlichen Bestandteil in dem Ausdrucke der Bremskraft bildet, ist dauernd positiv; sie verschwindet also für $j = 0$, steigt zunächst wie j , dann schwächer an bis zum Maximum bei $j = 1,3$ und fällt dann langsam wieder, für große Werte wie $1/j$. Die drei Funktionen, deren Summe $U(j)$ ist, $j \cdot P(j)$, $j^2 \cdot A J_0(j)$ und $j^2 \cdot Y_0(j)$, schwanken im Verhältnis zu $U(j)$ beträchtlich; daher dürfte diese Darstellung von $U(j)$ nur für kleine Werte des Argumentes in Frage kommen.

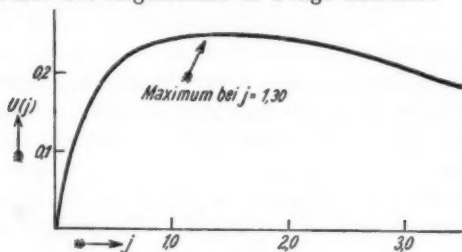


Fig. 1.

§ 7. Integration der Bewegungsgleichung.

Wenn wir nun den Fall einer punktförmigen Masse m haben, die in konstantem Abstand a über eine homogene Platte mit der Leitfähigkeit σ und der Dielektrizitätskon-

stanten ε hinwegfliegt, so wird uns die Integration der Bewegungsgleichung:

$$\mathfrak{R}(q) = m \cdot \frac{dq}{dt},$$

die uns q als Funktion von t liefert, im allgemeinen Ausdruck (4) nicht gelingen. Ist jedoch q einerseits $\ll \frac{8a\sigma}{\varepsilon + \varepsilon_0}$ nach

(4a) und $\mathfrak{R} = -\frac{E^2 \cdot q}{16\pi\sigma \cdot a^3}$, so wird:

$$(5a) \quad q = q_0 \cdot e^{-\frac{E^2}{16\pi\sigma a^3 \cdot m} \cdot t}.$$

Ist andererseits nach (4b): $q \gg \frac{8a\pi\sigma}{\varepsilon + \varepsilon_0}$ und dann $\mathfrak{R} = -\frac{(4\pi\sigma) \cdot E^2}{q \cdot a \cdot (\varepsilon + \varepsilon_0)^2}$,

so wird

$$(5b) \quad q = \text{sign}(q_0) \left| \sqrt{q_0^2 - t \frac{8\pi\sigma \cdot E^2}{a \cdot m \cdot (\varepsilon + \varepsilon_0)^2}} \right|.$$

Wenn die Bremsung die Geschwindigkeit der bewegten punktförmigen Ladung nur gering vermindert, so wird folgende Näherung erlaubt sein:

Die Länge der im Abstände a überflogenen Platte sei l , die Zeit des Überfliegens t , dann ist die Geschwindigkeit, mit der die Platte verlassen wird, $q(t) = q(0) + t\dot{q}(0)$. Wir vernachlässigen höhere Glieder und setzen die mittlere Geschwindigkeit beim Überfliegen:

$$\frac{q(0) + q(t)}{2} = \frac{l}{t},$$

woraus wir schließen:

$$t = \frac{2 \cdot l}{q(0) + q(t)}.$$

Wir berechnen $\mathfrak{R}(q)$ jetzt nur für $q = q(0)$, es gilt ja: $\mathfrak{R}(0) = m \cdot \dot{q}(0)$, also: $\dot{q}(0) = \frac{\mathfrak{R}(0)}{m}$, so ergibt sich angenähert mit Einsetzen von t und $\dot{q}(0)$ in die abgebrochene Taylorreihe:

$$q(t) = q(0) + \frac{2 \cdot l \cdot \mathfrak{R}(0)}{m (q(0) + q(t))}$$

und daraus:

$$(5c) \quad q(t) = \text{sign}(q_0) \cdot \left| \sqrt{q^2(0) + \frac{2 \cdot l \cdot \mathfrak{R}(0)}{m}} \right|.$$

§ 8. Kraft senkrecht zur Leiteroberfläche.

Wir wollen die Kraft *senkrecht* zur Oberfläche der Platte berechnen, die die Influenzladung auf die bewegte Ladung ausübt, und bilden zu dem Zwecke:

$$(\mathfrak{E}_y)_{y=a} = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_y^1 + \mathfrak{E}_y^2)_{y=a} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)_{y=a},$$

dann wird die Kraft in der negativen Y -Richtung:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} \int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} dx \int_{-\mu_0}^{+\mu_0} dz \cdot F \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)_{y=a},$$

mit Einsetzen der Potentiale und Integration nach x und z wird der reelle Teil hiervon für eine Punktladung E :

$$\mathfrak{R} = \frac{2 \cdot E^2 (s - s_0)}{\pi \cdot s_0 (s + s_0)} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \cdot e^{-2\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \frac{\alpha^2 + \alpha_1^2}{\alpha^2 + \alpha_2^2},$$

wo:

$$\alpha_1 = \frac{4\pi\sigma}{q \cdot \sqrt{s^2 - s_0^2}}; \quad \alpha_2 = \frac{4\pi\sigma}{q(s + s_0)}; \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

Mit den Substitutionen: $\alpha = r \cdot \cos \vartheta$; $\beta = r \cdot \sin \vartheta$; $d\alpha \cdot d\beta = r \cdot dr \cdot d\vartheta$ wird dies:

$$\mathfrak{R} = \frac{2 \cdot E^2 \cdot (s - s_0)}{\pi \cdot s_0 (s + s_0)} \int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-2\alpha r} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{\cos^2 \vartheta + \left(\frac{\alpha_1}{r}\right)^2}{\cos^2 \vartheta + \left(\frac{\alpha_2}{r}\right)^2}.$$

Ich setze in dem Integral:

$$\psi = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{\cos^2 \vartheta + \left(\frac{\alpha_1}{r}\right)^2}{\cos^2 \vartheta + \left(\frac{\alpha_2}{r}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = u, \quad d\vartheta = du \cdot \cos^2 \vartheta:$$

$$\psi = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \int_0^\infty du \frac{u^2 + 1 + \frac{r^2}{\alpha_1^2}}{(1 + u^2) \cdot \left(1 + \frac{r^2}{\alpha_2^2} + u^2\right)} = \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^2} + \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - 1\right) \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 1 + \frac{r^2}{\alpha_2^2}},$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{2 \cdot s_0}{(s - s_0) \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{\alpha_2^2}}} \right],$$

so wird die Anziehungskraft:

$$\mathfrak{R} = \frac{E^2 \cdot (s - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \cdot (s + \varepsilon_0)} \cdot \left[\int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-2ar} + \frac{2 \cdot \varepsilon_0}{s - \varepsilon_0} \int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-2ar} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a_1^2}}} \right].$$

Für $q = 0$, d. h. $\alpha_2 = \frac{4\pi\sigma}{q(s + \varepsilon_0)} = \infty$, wird das zweite Integral dem ersten gleich. Wir erhalten:

$$\mathfrak{R} = \frac{E^2}{\varepsilon_0} \int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-2ar} = \frac{E^2}{\varepsilon_0 \cdot 4a^2},$$

ein von dem berühmten Musterbeispiel der Elektrostatik hinlänglich bekanntes Ergebnis.

Mit wachsender Geschwindigkeit nimmt α_2 und damit das zweite Integral stetig ab und verschwindet endlich für unendliches q . Die Anziehungskraft ist dann nur noch

$$\mathfrak{R} = \frac{E^2}{\varepsilon_0 \cdot 4a^2} \cdot \frac{s - \varepsilon_0}{s + \varepsilon_0};$$

sie hat also in dem Verhältnis $\varepsilon - \varepsilon_0 / \varepsilon + \varepsilon_0$ abgenommen. Das Integral

$$J = \int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-2ar} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a_1^2}}}$$

wird mit der Substitution

$$r = \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad dr = \alpha_2 \cdot d\varphi \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \quad 2a \cdot \alpha_2 = j = \frac{8a\pi\sigma}{q(s + \varepsilon_0)};$$

$$J = \alpha_2^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi}$$

und mit partieller Integration

$$J = -\frac{\alpha_2^2}{j} \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi} \cdot \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\alpha_2^2}{j} \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \cos \varphi \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi}.$$

$[e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi} \cdot \sin \varphi]$ verschwindet an den Grenzen; es wird:

$$J = \frac{\alpha_2^2}{j} \cdot D(j); \quad \text{wo} \quad D(j) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \cos \varphi \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi}.$$

Bildet man nun:

$$\frac{d D(j)}{d j} = - \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \sin \varphi \cdot e^{-j \cdot i g \varphi} = - S(j),$$

so findet man, daß die Ableitung von D gleich dem oben in dem Ausdrucke der Bremskraft vorkommenden Integrale, negativ genommen ist. Man braucht also nur zu integrieren:

$$D = - \int S(j) \cdot dj + \text{Constans} = \\ - \int dj [P(j) + A \cdot j \cdot J_0(j) + B \cdot j \cdot Y_0(j)] + \text{Constans}.$$

Für alle Zylinderfunktionen Z von der Ordnung p gilt die unbestimmte Integrationsformel: $\int j^{p+1} \cdot Z_p(j) \cdot dj = j^{p+1} \cdot Z_{p+1}(j)$. Somit wird

$$D(j) = -j + \frac{1}{3} \cdot \frac{j^3}{1^2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{j^5}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{j^7}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - + \dots \\ - A \cdot j \cdot J_1(j) - B \cdot j \cdot Y_1(j) + \text{Constans}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten müssen wir $D(j)$ für einen Wert von j berechnen. Für $j = 0$ wird:

$$\lim_{j=0} D(j) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \cos \varphi \cdot e^{-j \cdot i g \varphi} = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \cdot d\varphi = 1.$$

Die Reihe, die das Integral von $P(j)$ darstellt, sowie die Funktion $J_1(j)$, um so mehr $j \cdot J_1(j)$, verschwinden für $j = 0$. Da $Y_1(j)$ darstellbar ist als die unendliche Summe von Zylinderfunktionen erster Art:

$$Y_1(j) = -\frac{1}{j} J_0(j) + J_1(j) + \frac{3}{1 \cdot 2} \cdot J_3(j) - \frac{5}{2 \cdot 3} \cdot J_5(j) + \dots,$$

ferner:

$$\lim_{j=0} J_0(j) = 1, \quad \lim_{j=0} J_p(j) = \frac{(j/2)^p}{p!} \text{ für } p = 1, 2, 3 \dots,$$

so wird: $\lim_{j=0} Y_1(j) = -1/j$. Da nun $B = 1$, wie oben berechnet, so ist: $\lim_{j=0} (D(j) - \text{Constans}) = 1$. Die Konstante ist demnach = Null. Wir erhalten

$$\frac{D(j)}{j} = Q(j) + 0,115 \cdot J_1(j) - Y_1(j).$$

Hier ist

$$Q(j) = - \frac{\int dj \cdot P(j)}{j} \\ = -1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{j^3}{1^2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{j^5}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{j^7}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - + \dots$$

Dann wird:

$$J = \int_0^{\infty} dr \cdot r \cdot e^{-2ar} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}}} = a^2 \cdot \frac{D(j)}{j} = \frac{j^2}{(2a)^2} \cdot \frac{D(j)}{j}.$$

$$J = \frac{1}{4a^2} \cdot j \cdot D(j).$$

Ich berechnete Q und $D(j)$, sowie $(D(j) \cdot j)$ für einzelne Werte von j . Q oszilliert ebenso wie F_1 und $A \cdot J_1$; $D(j)/j$ fällt monoton; $(D \cdot j)$ steigt monoton und hat die Asymptote $(D \cdot j) = 1$. Dies sieht man, wenn man den Grenzwert von $D(j)$ für große j ermittelt. Für solche wird in dem Integral

$$D(j) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \cos \varphi \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi}$$

der Faktor $e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi}$ des Integranden für so kleine φ -Werte schon praktisch verschwinden, für die noch ohne merklichen Fehler gesetzt werden darf: $\cos \varphi = 1$, $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$. Nennen wir φ_1 den φ -Wert, für den der Integrand zuerst unmerklich wird, so wird:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} D(j) = \int_0^{\varphi_1} d\varphi \cdot e^{-j \cdot \varphi} = -\frac{1}{j} \cdot e^{-j \cdot \varphi} \Big|_0^{\varphi_1} = \frac{1}{j}.$$

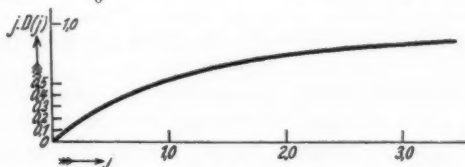


Fig. 2.

Daher ist $\lim_{j \rightarrow \infty} (j \cdot D(j)) = 1$. Da, wie oben gezeigt, $\lim_{j \rightarrow 0} D(j) = 1$, so ist: $\lim_{j \rightarrow 0} (j \cdot D(j)) = j$. $(j \cdot D(j))$ steigt also anfangs linear an. Als vollständigen Ausdruck für die *Anziehungskraft* erhalten wir:

$$(6) \quad \mathfrak{K} = \frac{E^2 \cdot (s - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 (s + \varepsilon_0) \cdot 4 a^2} \left[1 + \frac{2 \varepsilon_0}{s - \varepsilon_0} (j \cdot D(j)) \right].$$

§ 9. Berücksichtigung endlicher Plattendicke.

Bislang war der leitende Körper als unendlich ausgedehnt betrachtet worden. Die Rechnung ist auch durchgeführt worden für Leiter mit endlicher Dicke h . Da aber keine grundsätz-

lichen Schwierigkeiten dabei auftreten, soll hier nur das Ergebnis Platz finden:

In dem Doppelintegral (2), das die auf den Ladungsträger in der Bewegungsrichtung ausgeübte Kraft darstellt, tritt anstatt des Bruches $\frac{1}{(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\epsilon + \epsilon_0)^2}$ der kompliziertere:

$$\frac{1 - \frac{q\alpha\epsilon}{4\pi\sigma} \cdot e^{-2h \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \frac{N \cdot J}{R^2 + J^2} - e^{-4h \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \frac{N^2}{R^2 + J^2}}{[(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\epsilon + \epsilon_0)^2] + 2 \cdot e^{-2h \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \frac{N \cdot (J^2 - R^2)}{J^2 + R^2} + e^{-4h \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \frac{N^2}{J^2 + R^2}},$$

wobei:

$$J = 8\pi\sigma q\alpha\epsilon_0; \quad N = q^2\alpha^2(\epsilon - \epsilon_0)^2 + (4\pi\sigma)^2; \\ R = q^2\alpha^2(\epsilon^2 - \epsilon_0^2) + (4\pi\sigma)^2.$$

Für $h = \infty$, d. h. $e^{-h \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 0$, geht er in den ersten über, wirkt jedoch bei endlichem h für alle Werte von α und β verkleinernd und bringt für $h = 0$, d. h. $e^{-h \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 1$, den Integranden zum Verschwinden.

§ 10. Punktförmige Ladungen, die durch einen Hohlzylinder fliegen.

Die Rechnung wurde durchgeführt für punktförmige Ladungen E , die in gleichen Abständen von l cm durch die Achse eines Hohlzylinders fliegen, dessen innerer Radius r_2 beträgt und dessen äußerer unendlich groß ist. Die Lösung gelang hier mit Fourierreihen und, naturgemäß, Zylinderfunktionen. Die Schlüsse des § 2 sind auch hier für die elektrischen Felder maßgebend. Es bedeuten: $(J_0)_2$ die Besselsche Funktion nullter Ordnung, $\left(\frac{i\pi}{2}H_0\right)_2$, $\left(\frac{\pi}{2}H_2\right)_2$ die Hankelschen Funktionen nullter und erster Ordnung, sämtlich zu nehmen vom Argumente

$$(7) \quad w_2 = \frac{2\pi i k r_2}{l},$$

k ist die Ordnungszahl der Fourierreihe. Dann ist die auf jede Ladung E ausgeübte Bremskraft durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$(8) \quad \mathfrak{R} = \frac{8 \cdot E^2 \cdot \sigma}{q \cdot r_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{i\pi}{2} H_0\right)_k \left(\frac{\pi}{2} H_1\right)_k}{k \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} H_1\right)_k^2 \cdot (J_0)_k^2 \left\{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \frac{4\sigma^2 l^2}{k^2 \cdot q^2}\right\} - \frac{\varepsilon_0 \cdot l(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\pi \cdot k \cdot r_2} \left(\frac{\pi}{2} H_1\right)_k (J_0)_k + \frac{\varepsilon_0^2 \cdot l^2}{4\pi^2 k^2 r_2^2}\right]}$$

Zahlenrechnungen.

§ 11. Kathodenstrahlteilchen mit $q = 10^9 \cdot \text{cm/sec}^{-1}$.

Um zunächst einen Begriff von der Größenordnung der hier in Frage kommenden Erscheinungen zu erhalten, wollen wir für ein Kathodenstrahlteilchen, das einem Potentialgefälle von etwa 300 Volt entstammt, die *Anziehungskraft* nach (6) und (4) berechnen für den ebenen Fall und nach (8) auch die *Bremskraft* für den zylindrischen Fall. Der Abstand von der Leiteroberfläche soll sein

$$a = 0,032 \left(= \frac{1}{10 \cdot \pi} \right) \text{ cm,}$$

ebenso groß soll der Radius r_2 des Zylinders sein. Wir setzen die Dielektrizitätskonstante der Luft $\varepsilon_0 = 1$. Der Leiter habe $\varepsilon = 5$, $\sigma = 10^{10} \text{ sec}^{-1}$; dann ist $\varepsilon + \varepsilon_0 = 6$, $\varepsilon - \varepsilon_0 = 4$. Geschwindigkeit des Elektrons q und Spannung der Kathodenröhre V sind durch die Gleichungen verbunden:

$$\frac{m \cdot q^2}{2} = E \cdot V;$$

es ist $E = 4,774 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$, $m = 0,903 \cdot 10^{-27} \text{ g}$.

300 Volt = $300 \cdot \frac{1}{300} = 1$ elektrostatische Spannungseinheiten.

$$q = \sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,774 \cdot 10^{-10}}{0,903 \cdot 10^{-27}}}; \quad q \sim 10^9 \frac{\text{cm}}{\text{sec}};$$

die wichtige Größe j wird:

$$j = \frac{8\pi\sigma}{q(\varepsilon + \varepsilon_0)} = \frac{8 \cdot 0,032 \cdot \pi \cdot 10^{10}}{10^9 \cdot 6} = 1,33.$$

Wir erhalten aus (4) für die *Bremskraft*:

$$\mathfrak{R} = - \frac{E^2}{2\sigma^2(\varepsilon + \varepsilon_0)} U(j) = - \frac{(4,774)^2 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot (0,032)^2 \cdot 6} \cdot 0,2495,$$

$$\mathfrak{R} = - 4,68 \cdot 10^{-18} \text{ dyn,}$$

d. h. wenn das Elektron die Länge $l = 10$ cm überfliegt und zu Beginn die Geschwindigkeit $q_0 = 10^9$ cm/sec $^{-1}$, danach die Geschwindigkeit q_t hat, so ist die Geschwindigkeitsverminderung:

$$q_0 - q_t = \frac{(-\mathfrak{R}) \cdot t}{m} = \frac{(-\mathfrak{R}) \cdot l}{m \cdot q_0} = \frac{4,63 \cdot 10^{-13} \cdot 10}{0,903 \cdot 10^{-27} \cdot 10^9},$$

$q_0 - q_t = 52$ cm/sec. Das Elektron verliert also *nur den zwanzig-millionsten Teil* seiner Geschwindigkeit.

Die *Anziehungskraft* wird nach (6):

$$\mathfrak{R} = \frac{E^2 (s - s_0)}{s_0 (s + s_0) \cdot 4 a^2} \left(1 + \frac{2 s_0}{s - s_0} \cdot j \cdot D(j) \right),$$

$$\mathfrak{R} = \frac{(4,774)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-20}}{6 \cdot 4 \cdot (0,032)^2} (1 + \frac{1}{2} \cdot 0,624) = + 49,3 \cdot 10^{-13} \text{ dyn.}$$

Für $q = 0$ wäre die Anziehungskraft:

$$\mathfrak{R} = \frac{E^2}{s_0 \cdot 4 a^2} = \frac{(4,774)^2 \cdot 10^{-20}}{4 \cdot (0,032)^2} = + 56,2 \cdot 10^{-13} \text{ dyn.}$$

Ich bestimmte dann auch die Bremskraft für den zylindrischen Fall aus (8). Ich wählte die Periode $l = 1$ cm. Damit wird

$$\mathfrak{R} = \frac{8 \cdot E^2 \cdot \sigma}{q \cdot r_2} \sum_{k=1}^{\infty} = - \frac{8 \cdot (4,774)^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{10} \cdot 0,0150}{10^9 \cdot 0,032} = - 8,6 \cdot 10^{-13} \text{ dyn.}$$

Die Bremskraft ist also unter diesen Verhältnissen *nahezu doppelt so groß* wie im ebenen Falle.

§ 12. Möglichkeit experimenteller Prüfung.

Zunächst soll die hier auftauchende Frage entschieden werden, ob bewegte Elektronen (Kathodenstrahlen) beim Vorüberfliegen an Leitern *merklich* gebremst werden. Da an der Verneinung dieser Frage die Sicherheit vieler grundlegender Versuche hängt, darf sie wohl schon Platz finden. Nach (4) ist die Bremskraft:

$$\mathfrak{R} = - \frac{E^2}{2 a^2 (s + s_0)} \cdot U(j).$$

Wir nehmen den Abstand möglichst klein, etwa $a = 0,01$ cm, und als die Geschwindigkeit langsamer Kathodenstrahlen $q = 10^8$ cm/sec $^{-1}$. Das entspricht einer Spannung von 3 Volt. Für das Elektron ist $E = - 4,774 \cdot 10^{-10}$ cm $^{3/2}$ g $^{1/2}$ sec $^{-1}$,

$m = 0,903 \cdot 10^{-27}$ g. Wir wollen die für die Bremsung günstigsten Bedingungen wählen, es sei also $\varepsilon = 1$ und σ so beschaffen, daß $j = \frac{8a\pi\sigma}{q(\varepsilon + \varepsilon_0)} \sim 1,3$ wird, $U(j)$ demnach seinen größten Wert hat. Ob dieser günstigste Körper mit solchem ε und σ besteht, ist gleichgültig, wenn nur bei diesem schon die Bremsung nicht mehr wahrnehmbar wird. Die vom Elektron überflogene Strecke sei $l' = 10$ cm. Mit diesen Zahlen wird nach (5c):

$$q(l) = \text{sign}(q_0) \cdot \sqrt{q_0^2 - \frac{E^2 \cdot l \cdot U(j)}{m \cdot a^2 \cdot (\varepsilon + \varepsilon_0)}} = \sqrt{10^{16} - 3,1 \cdot 10^{16}} \\ = 0,9999985 \cdot 10^8 \text{ cm/sec},$$

eine Größe, deren Abweichung von q_0 nicht zu messen sein dürfte. Bei geringeren Geschwindigkeiten würde das die Bremsung hervorrufoende Glied in (5c):

$$(4d) \quad b = \frac{2 \cdot E_0 \cdot l}{m} = - \frac{E^2 \cdot l \cdot U(j)}{m \cdot a^2 \cdot (\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

bei gleichbleibendem Verhältnis q/σ mit abnehmendem q das erste Glied q_0^2 unter der Wurzel in (5c) weit übertreffen, die Bremsung also sehr stark sein. Wenn q in die Größenordnung der Hertzschen Versuche kommt, etwa $q = 1 \text{ cm/sec}^{-1}$, so ergibt sich, wenn ε etwa 4 und $a = 0,2$ cm ist, das günstigste σ (das $j = 1,3$ macht) zu etwa $\sigma = 1,5 \text{ sec}^{-1}$. Das ist die Größenordnung der Leitfähigkeit von Spiegelglas, das Hertz verwendete. Bei einem seiner Versuche drehten sich zwei rechteckige Kupferscheiben mit den Kantenlängen 3 cm und 2 cm an einer 10 cm langen Nadel, während die Spannung von 50 Daniellelementen $= 50 \cdot 1,085 \text{ Volt} = \frac{50 \cdot 1,085}{300} = 0,018$ absolute elektrostatische Spannungseinheiten angelegt war. Die Kapazität C dieses ebenen Kondensators ist mit Vernachlässigung der Randwirkung:

$$C = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\text{Fläche}}{\text{Abstand}} = \frac{2 \cdot 3}{4\pi \cdot 0,2} = 2,4 \text{ cm}.$$

Die Ladung = Kapazität mal Spannung

$$= 0,018 \cdot 2,4 \sim 0,5 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}.$$

Berücksichtigen wir den Trägheitswiderstand der an die Nadel gehängten Gewichte, indem wir etwa setzen $m = 5$ g, so wird mit: $q = 1 \text{ cm/sec}^{-1}$, $E = 0,5 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$, $\varepsilon + \varepsilon_0 = 5$,

$\sigma = 0,25 \text{ sec}^{-1}$, $a = 0,2 \text{ cm}$, daher $j = \frac{8\pi \cdot 0,25 \cdot 0,2}{1 \cdot 5} \sim 0,2$ und $U(j) = 0,12$ die Bremsung auf der Strecke $l = 1 \text{ cm}$ nach (4d):

$$b = - \frac{(0,5)^3 \cdot 1 \cdot 0,12}{5 \cdot (0,2)^3 \cdot 5} = - 0,03 \text{ cm}^2/\text{sec}^{-2},$$

eine Größe, die auf $q = 1 \text{ cm/sec}^{-1}$ merkbar vermindert wirkt, selbst wenn wir berücksichtigen, daß wir hier einerseits die Ladung nicht als endlich ausgedehnt, sondern punktförmig betrachten, was aber wohl keine außerhalb der Größenordnung liegende Werte hervorruft, ferner natürlich Formel (5c) nur für geringe Bremsung oder sehr kurze Bremszeiten annähernd gilt. Ein genaues Zahlenbeispiel nach der ursprünglichen Formel (2) auszurechnen, hielt ich aus dem Grunde nicht der Mühe lohnend, da auch bei einer solchen Rechnung q als räumlich konstant angenommen werden müßte, was für die Hertzschen Torsionsversuche eben nicht gilt.

Ich möchte es nicht unterlassen, Hrn. Prof. M. von Laue auch an dieser Stelle meinen ehrerbietigen und tiefgefühlten Dank auszusprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und viele gütige Hilfe und Teilnahme an derselben.

Ich gedenke auch gern der Anteilnahme und mancher Ratschläge meines Freundes, Hrn. Marianus Czerny.

(Eingegangen 7. Mai 1923.)

usw.

,2 und
h (40):

wirkl.
ts die
nig be-
dnung
) nur
hernd
lichen
nt der
g als
r die

Laue
hlten
und
ncher

Be-
buch
28
Dit
Jap